Begründung
eines
eigenthümlichen Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen mit numerischen Coëfficienten.

Von **Fr. Moth**,
correspondirendem Mitgliede der kais. Akademie der Wissenschaften.

(Vorgelegt in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe am 8. Juni 1848.)

Die Auflösung einer grossen Anzahl Probleme der reinen Mathematik und der mathematischen Physik ist in letzter Instanz von der Bestimmung der Werthe der Wurzeln einer Gleichung abhängig. Ist diese Gleichung vom ersten Grade, so bedarf man, um zur Kenntniss ihrer Wurzeln zu gelangen, nur der rationalen Operationen. Dieselben aber reichen im Allgemeinen nicht mehr hin, sobald die Gleichung den ersten Grad übersteigt. In diesem Falle muss zu den Operationen des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens die Operation der Radication (Wurzelausziehung) hinzutreten. Indessen sind es unter den Gleichungen höherer Grade nur die des zweiten, dritten und vierten Grades, deren Wurzeln sich mittelst der gedachten fünf Operationen aus den Coëfficienten der Gleichung herleiten lassen; während die Wurzeln der Gleichungen höherer Grade, sobald sie den vierten übersteigen, im Allgemeinen nicht auf die Art, wie bei den Gleichungen der genannten Grade, durch eine geschlossene Formel, in der die Coëfficienten der Gleichung durch die rationalen und irrationalen Operationen unter sich verknüpft wären, darstellbar sind, wie diess schon Ruffini und Abel zu zeigen suchten. Aber selbst unter der Voraussetzung der Möglichkeit einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen eines jeden Grades in dem Sinne, in welchem man dergleichen Auflösungen für Gleichungen bis zum vierten Grade besitzt, wird man wohl in den seltensten Fällen, und etwa nur mit Ausnahme der quadratischen, von einer solchen mit Vortheil Gebrauch machen können, um zur Kenntniss der Wurzeln dieser Gleichungen zu gelangen. Ungleichwichtiger für die Anwendung sind daher jene Methoden, welche die Werthe der Wurzeln annäherungsweise bestimmen lehren. Soll aber eine solche Methode an die Stelle einer strengen Auflösung der Gleichung treten können, so muss dieselbe nicht bloss jeden möglichen Grad der Genauigkeit erreichbar machen; es ist auch noch nothwendig, dass man sichere Kennzeichen zur Beurtheilung des jedesmal erreichten Grades dieser Genauigkeit besitze. Die von Fourier vervollkommnete lineare Annäherungsmethode, welche zuerst von Newton in minder vollkommnerer Form angewandt worden ist, die reellen Wurzeln der Gleichungen mit numerischen Coëfficienten zu erhalten, entspricht nicht nur jenen Forderungen, sondern empfiehlt sich auch durch Einfachheit des zu führenden Calcüls. Kennt man nemlich den Werth einer reellen Wurzel einer gegebenen Gleichung mit numerischen Coëfficienten bis zu einem bekannten Grade der Genauigkeit, alsdann liefert eine zwei- oder mehrmal wiederholte Anwendung der Operationen, welche die genannte Methode

vorschreibt, immer mehr und mehr Stellen von dem in Decimalbruchform ausgedrückten Werthe der Wurzel, die dem wahren Werthe angehören, wobei die Menge dieser Stellen mit der Anzahl dieser Wiederholungen in einer geometrischen Progression wächst und zugleich über den erlangten Grad der Genauigkeit der Wurzel mit befriedigender Vollständigkeit Rechenschaft gegeben werden kann. Nach dem gegenwärtigen Stand der Theorie der Gleichungen mit numerischen Coëfficienten zerfällt deren Auflösung in zwei wesentlich von einander verschiedene Theile, deren einer sich mit der Trennung der Wurzeln einer Gleichung, der andere aber mit der numerischen Berechnung der getrennten Wurzeln beschäftigt. Die von Sturm, Fourier und Cauchy entdeckten Lehrsätze setzen uns in den Stand, in jedem besonderen Falle einer Gleichung mit numerischen Coëfficienten, sofern dieselben nur reelle Zahlen sind, folgende Fragen entscheidend zu erledigen: Hat eine vorgelegte Gleichung reelle Wurzeln oder besitzt sie keine derselben? Wenn reelle Wurzeln vorhanden sind, wie gross ist die Menge derselben? Zwischen welchen Grenzen liegen diese reellen Wurzeln insgesammt, und zwischen welchen jede einzelne von ihnen? Welche sind nämlich die einzelnen Intervalle, die so beschaffen sind, dass jedes von ihnen nur eine einzige Wurzel enthalte? Da man übrigens die Mittel kennt, die Auflösung einer Gleichung, wenn solche vielfache Wurzeln besitzt, von der Auflösung einer andern abhängig zu machen, deren sämmtliche Wurzeln nur einfache sind, so sieht man sich mittelst der erwähnten Lehrsätze in den Stand gesetzt, die reellen Wurzeln einer Gleichung dergestalt von einander zu trennen, dass für jede aus ihnen zwei Grenzwerthe angegeben werden können, zwischen denen nicht mehr Wurzeln liegen, als eben nur diese eine. Bezüglich der reellen Wurzeln einer Gleichung ist daher der erste Theil der Aufgabe von der Auflösung der Gleichungen mit numerischen Coëfficienten als vollständig gelöst zu betrachten.

Kennt man nun zwei Grenzen, zwischen welchen eine reelle Wurzel einer bestimmten Gleichung liegt, und ist man versichert, dass in diesem Intervalle keine andere Wurzel dieser Gleichung mehr liegt; alsdann ist es noch erforderlich, Werthe zu bestimmen, denen sich die Wurzel immer mehr und mehr nähert, um zur Kenntniss aller Ziffern zu kommen, durch welche dieselbe ausgedrückt wird, wenn die Anzahl dieser Ziffern begrenzt ist, oder doch so viele genaue Ziffern, als man will zu finden, d. h. es ist erforderlich, den Werth der Wurzel annäherungsweise zu berechnen. Dieser Zweck kann durch verschiedene, mehr oder weniger weitläufige Rechnungen erfordernde Verfahrungsarten erreicht werden. Ein erstes Mittel bietet die bereits erwähnte Newton'sche oder lineare Annäherungsmethode dar. In seinem berühmten Werke über die Auflösung der numerischen Gleichungen hat Lagrange bereits angezeigt, dass diese Methode in der Form, wie sie von Newton gegeben worden ist, unvollständig sei, indem sie kein Merkmal darbietet, woran sich die Richtigkeit der Annäherung jedesmal mit Gewissheit erkennen lasse, und hat hinzugefügt, dass es sehr schwer, vielleicht selbst unmöglich sei *a priori* ein Merkmal zu finden, wornach sich beurtheilen liesse, ob die Bedingung der Convergenz der Operation erfüllt sei oder nicht. Diese wichtige Frage ist jetzt durch Fourier's Bemühungen vollständig gelöst, so dass die lineare Approximation immer anwendbar ist und eine vollständige Kenntniss des gesuchten Werthes einer reellen Wurzel erreichen hilft. Diesem Geometer verdanken wir aber nicht bloss diese wichtige Vervollkommnung der Newton'schen Methode; er bereicherte die Wissenschaft auch durch bedeutende Verbesserungen an dem numerischen Calcül, welchen die Bestimmung der reellen Wurzel fordert. Allein! dieser Vorzüge ungeachtet trägt, wie ihr Vorbild, die Newton'sche, auch diese Fourier'sche in so fern noch nicht das Gepräge der Vollkommenheit an sich, indem diese, wie jene, bereits auf einen gewissen Grad genäherte Grenzwerthe voraussetzt, um sogleich zur Anwendung des approximativen Verfahrens fortschreiten zu können. Diess wird nämlich nur dann der Fall sein können, wenn für die beiden Grenzwerthe a, b einer Wurzel der Gleichung, die wir mit $f(x) = 0$ vorstellig machen wollen, noch die besondere Bedingung erfüllt ist, dass, während diese Gleichung zwischen a und b nur eine reelle Wurzel liegen hat, die beiden Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ in eben demselben Intervall keine Wurzel haben. Man muss daher, wenn dies noch nicht der Fall

wäre, das Intervall $a..b$ so lange durch eine oder mehrere Mittelwerthe theilen, bis man zu zwei Grenzwerthen gelangt, für welche die erwähnten Bedingungen erfüllt sind. Von diesen aus beginnt hierauf das geregelte Verfahren der approximativen Bestimmung der in diesem Intervall liegenden reellen Wurzel. Diesem Uebelstande ist von Cauchy durch zwei allgemeine Methoden, deren eine am 22. und 29. Mai 1837, und deren andere am 4. September desselben Jahres der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorgelegt worden ist, begegnet worden, indem durch deren Anwendung aus je zwei, wenngleich noch so entfernten Grenzwerthen a und b einer Wurzel allezeit nähere Werthe derselben erhalten werden, während die Anwendung des Fourier'schen Verfahrens, wenn die oben erwähnten Bedingungen für die beiden Grenzwerthe a und b noch nicht erfüllt wären, eine solche Bestimmung dadurch unsicher machen, dass man sich, anstatt dem wahren Werthe der Wurzel näher zu kommen, zuweilen von ihr auch wieder entfernt. Zur Erreichung desselben Zweckes lassen sich auch noch die mannigfaltigen Formeln der Mathematik gebrauchen, als die continuirlichen Brüche, die recurrenten Reihen, die Producte mit unendlichen Factorenfolgen, insbesondere die der binomischen Factoren von der Form $(1+\frac{\alpha}{10})\,(1+\frac{\beta}{100})\,(1+\frac{\gamma}{1000})\ldots$, worin $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einzifferige Zahlen bedeuten, und mehrere andere, und sind zum Theil in der That dazu verwendet worden, wie die ersten von Lagrange, die zweiten von Euler. Aber alle bisher genannten Methoden lassen, wenngleich sie den streng wissenschaftlichen Anforderungen ein Genüge leisten, von der practischen Seite betrachtet, noch Mehreres zu wünschen übrig, insbesondere in Hinsicht auf den Umstand, dass bei Anwendung einer jeden dieser Methoden, nachdem ein Näherungswerth der Wurzel gefunden worden ist, jedesmal der Grad der Genauigkeit, mit welchem der gefundene Werth den der Wurzel gibt, für sich bestimmt werden muss, welche Bestimmung selber wieder einer bald mehr bald weniger complicirten Berechnung bedarf.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben die Entwicklung einer Methode zur Berechnung der reellen Wurzeln einer Gleichung mit numerischen Coëfficienten zum Zwecke, welche von diesen Mängeln frei ist. Im Wesentlichen besteht diese Verfahrungsart in der Anwendung eines geregelten Verfahrens, die einzelnen Ziffern, mit denen der wahre Werth der Wurzel geschrieben wird, successive und in ähnlicher Weise zu erhalten, auf welche man die Ziffern eines Quotienten zweier dekadischer Zahlen, oder die Ziffern der Quadrat- und Cubikwurzeln aus dekadischen Zahlen mittelst der bekannten Rechnungsmechanismen nach und nach zum Vorschein bringt. Diese letztern enthalten mehrere überflüssige Rechnungen. Die Anwendung unserer Methode auf den Fall, da die vorgelegte Gleichung eine reine Potenzgleichung ist, d. h. die Form $x^n = a$ hat, wobei a eine gegebene dekadische Zahl bedeutet, wird auch für die Ausziehung der Wurzeln eines jeden Grades aus dekadischen Zahlen zu einem, von überflüssigen Rechnungen freien Rechnungsmechanismus führen, der in Vergleichung mit demjenigen, dessen man sich bei der Ausziehung der Wurzeln aus den dekadischen Zahlen zu bedienen pflegt, das Gepräge grösserer Vollkommenheit an sich trägt.

---

§. I.
Entwicklung allgemeiner Formeln.

Es sei

(1) . . . . . $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$

eine ganze Function, und

(2) . . . . . $x = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots\dots$

eine Reihe, welche in die Function (1) für x substituirt werden soll. Das Resultat ist ein Ausdruck von der Form

(3) . . . . $Z_0 + Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \dots,$

worin die Coëfficienten

(4) . . . . $Z_0;\; Z_1;\; Z_2;\; Z_3;\; \dots$

von den Coëfficienten der Formen (1), (2), d. i. von den Zahlen

(5) . . . $a_1;\; a_2;\; a_3;\; \dots;\; a_{n-1};\; a_n;$ (6) . . $A_0;\; A_1;\; A_2;\; A_3;\; \dots$

abhängen werden. Bringt man das Polynom (2) unter die Form

$$A_0 + z . (A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \dots),$$

und setzt abkürzend

(7) $$\begin{cases} R = A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \dots \\ R^2 = B_1 + B_2 z + B_3 z^2 + \dots \\ R^3 = C_1 + C_2 z - C_3 z^2 + \dots \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

so ist $x = A_0 + R . z$ und $f(x) = f(A_0 + R . z)$.

Nach der Taylor'schen Formel hat man

$$f(A_0 + R . z) = f(A_0) + \frac{R . f'(A_0)}{1} . z + \frac{R^2 . f''(A_0)}{1 . 2} . z^2 + \frac{R^3 . f'''(A_0)}{1 . 2 . 3} . z^3 + \text{etc.}$$

Bringt man in diese Entwicklung für $R, R^2, R^3, \dots$ die Ausdrücke (7), so hat man endlich

(8) . $$f(x) = f(A_0) + A_1 . f'(A_0) . z + \left. \begin{matrix} A_2 . f'(A_0) \\ + \frac{1}{1 . 2} B_1 . f''(A_0) \end{matrix} \right\} z^2 + \left. \begin{matrix} + A_3 . f'(A_0) \\ + \frac{1}{1 . 2} B_2 . f''(A_0) \\ + \frac{1}{1 . 2 . 3} C_1 . f'''(A_0) \end{matrix} \right\} z^3 + \text{etc.}$$

Die Vergleichung dieser Entwicklung (8) mit (3) führt daher zu den Formeln

(9) . . . . $Z_0 = f(A_0)$

$$(10)\quad \begin{cases} Z_1 = f'(A_0).A_1; \\ Z_2 = f'(A_0).A_2 + \frac{1}{1.2}f''(A_0).B_1; \\ Z_3 = f'(A_0).A_3 + \frac{1}{1.2}f''(A_0).B_2 + \frac{1}{1.2.3}f'''(A_0).C_1; \\ Z_4 = f'(A_0).A_4 + \frac{1}{1.2}f''(A_0).B_3 + \frac{1}{1.2.3}f'''(A_0).C_2 + \frac{1}{1.2.3.4}f^{IV}(A_0).D_1; \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Um ferner abzukürzen, setze ich

$$(11)\quad \ldots\quad M = f'(A_0);$$

$$(12)\quad \ldots\quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{1.2}f''(A_0); \\ M_2 = \frac{1}{1.2.3}f'''(A_0); \\ M_3 = \frac{1}{1.2.3.4}f^{IV}(A_0); \\ \ldots\ldots \end{cases} \quad \text{und}\quad (13)\ \ldots \begin{cases} K_1 = M_1 B_1; \\ K_2 = M_1 B_2 + M_2 C_1; \\ K_3 = M_1 B_3 + M_2 C_2 + M_3 D_1; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Alsdann lassen sich die Coëfficienten Z_1, Z_2, Z_3, ... durch folgende Formeln darstellen:

$$(14)\quad \ldots\ldots \begin{cases} Z_1 = M.A_1; \\ Z_2 = M.A_2 + K_1; \\ Z_3 = M.A_3 + K_2; \\ Z_4 = M.A_4 + K_3; \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Zur Berechnung der Werthe von K_1, K_2, K_3, ... lässt sich ein leichter Rechnungsmechanismus finden, durch welchen die Werthe der Formeln B_1, B_2, B_2, ... C_1, C_2, C_3, ... D_1, D_2, D_3, ... erhalten werden können. In dieser Absicht wollen wir die Entwicklung des Productes

$$(15)\quad \ldots\quad (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{A}_2 z^2 + \mathfrak{A}_3 z^3 + \ldots)(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 z + \mathfrak{B}_2 z^2 + \mathfrak{B}_3 z^3 + \ldots),$$

welche wir durch

$$(16)\quad \ldots\quad P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + P_3 z^3 + \ldots + P_m z^m + \ldots$$

andeuten wollen, näher betrachten. Es ist nämlich

$$(17)\quad \ldots \begin{cases} P_0 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0; \\ P_1 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_0; \\ P_2 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_0; \\ P_3 = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_0; \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_m = \mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_m + \mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_{m-1} + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_{m-2} + \ldots + \mathfrak{A}_{m-1}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_m\mathfrak{B}_0. \end{cases}$$

Aus der blossen Ansicht dieser Formeln ergibt sich ein sehr einfacher Rechnungsmechanismus für die Bestimmung der Coëfficienten P_0, P_1, P_2, P_3, ... P_m, ...

Man schreibe nämlich die Coëfficienten des einen Polynoms unter die entsprechenden des andern, so zwar, dass immer zwei Coëfficienten gleich hoher Potenzen von z unter einander zu stehen kommen, auf folgende Art:

$$(\alpha)\ldots\ldots \mathfrak{A}_0\quad \mathfrak{A}_1\quad \mathfrak{A}_2\quad \mathfrak{A}_3 \ldots\ldots \mathfrak{A}_m \ldots$$
$$(\beta)\ldots\ldots \mathfrak{B}_0\quad \mathfrak{B}_1\quad \mathfrak{B}_2\quad \mathfrak{B}_3 \ldots\ldots \mathfrak{B}_m \ldots$$

Solche Reihen, deren Glieder nach dem in den Formeln (17) ausgedrückten Gesetze zu verbinden sind, werde ich producirende Zahlenreihen, und wenn die einzelnen Glieder blosse Ziffern sind, producirende Zifferreihen nennen. Mehrere, in gehöriger Ordnung unter einander gesetzte Reihen dieser Art heissen wir ein System producirender Reihen, welche ich noch überdiess nach ihrer Folge, wie sie unter der ersten, von oben nach unten, stehen, durch die Ausdrücke: Reihe der ersten, zweiten, dritten,... Ordnung unterscheiden will.

Wenn nun irgend einer der Coëfficienten, im Allgemeinen P_m, berechnet werden soll, so verwendet man zur Bildung desselben von jeder der beiden Reihen (α), (β), $m+1$ Glieder, um aus ihnen $m+1$ Partialproducte zu bilden, von denen einer der Factoren aus der Reihe (α), der andere aus der Reihe (β) genommen wird, so zwar, dass die Summe ihrer Anzeiger stets derselben Zahl m gleich bleibe. Nimmt man also

$$\mathfrak{A}_0;\ \mathfrak{A}_1;\ \mathfrak{A}_2;\ \mathfrak{A}_3;\ \ldots;\ \mathfrak{A}_{m-1};\ \mathfrak{A}_m$$

der Reihe nach zu den ersten Factoren an, so sind

$$\mathfrak{B}_m;\ \mathfrak{B}_{m-1};\ \mathfrak{B}_{m-2};\ \mathfrak{B}_{m-3};\ \ldots;\ \mathfrak{B}_1;\ \mathfrak{B}_0$$

die respectiven zugehörigen zweiten Factoren dieser Producte. Werden hierauf diese $m+1$ Partialproducte in eine Summe zusammengezogen; so ist dieselbe der Werth von P_m.

Ich werde eine aus zwei Zahlenreihen nach dem eben besprochenen Gesetze hergeleitete Zahl schlechthin nur eine producirte Summe nennen.

Wir wollen nun diese Sätze zur Berechnung der verschiedenen Potenzen von R anwenden, wobei es offenbar hinreicht, nur den Fall, da $f(x)=x^n$ angenommen wird, zu betrachten. Da nun

$$(A_0+R.z)^n=A_0^n+\binom{n}{1}A_0^{n-1}R.z+\binom{n}{2}A_0^{n-2}R^2.z^2+\binom{n}{3}A_0^{n-3}R^3.z^3+\ldots;$$

so hat man, wenn man

$$R^2=R.R;\ R^3=R^2.R;\ldots$$

setzt, und der Abkürzungen (7) sich bedient

$$\begin{aligned}(A_0+R.z)^n=A_0^n&+\binom{n}{1}A_0^{n-1}.A_1z+\binom{n}{2}A_0^{n-2}A_2z^2+\binom{n}{3}A_0^{n-3}A_3z^3+\ldots\\&+\binom{n}{2}A_0^{n-2}(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots)(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots).z^2\\&+\binom{n}{3}A_0^{n-3}(B_1+B_2z+B_3z^2+\ldots)(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots).z^3\\&+\binom{n}{4}A_0^{n-4}(C_1+C_2z+C_3z^2+\ldots)(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots).z^4\\&+\text{u. s. f.}\end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck noch weiter entwickelt, und werden hierauf alle erhaltenen Glieder nach Potenzen von z geordnet, so findet man

$$(18)\ \ldots\ldots\ (A_0+R.z)^n=A_0^n+\binom{n}{1}A^{n-1}A_1z+\left[\binom{n}{1}A_0^{n-1}A_2+\mathfrak{K}_1\right].z^2$$
$$+\left[\binom{n}{1}A_0^{n-1}A_3+\mathfrak{K}_2\right].z^3$$
$$+\left[\binom{n}{1}A_0^{n-1}A_3+\mathfrak{K}_3\right].z^4$$
$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

worin abkürzend gesetzt ist

$$(19) \quad . \begin{cases} \mathfrak{K}_1 = \binom{n}{2} A_0^{n-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_1 \end{bmatrix}; \\ \mathfrak{K}_2 = \binom{n}{2} A_0^{n-1} \begin{bmatrix} A_1 A_2 \\ A_1 A_2 \end{bmatrix} + \binom{n}{3} A_0^{n-3} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}; \\ \mathfrak{K}_3 = \binom{n}{2} A_0^{n-2} \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 \\ A_1 A_2 A_3 \end{bmatrix} + \binom{n}{3} A_0^{n-3} \begin{bmatrix} A_1 A_2 \\ B_1 B_2 \end{bmatrix} + \binom{n}{4} A_0^{n-4} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \end{bmatrix}; \\ \mathfrak{K}_4 = \binom{n}{2} A_0^{n-2} \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 A_4 \\ A_1 A_2 A_3 A_4 \end{bmatrix} + \binom{n}{3} A_0^{n-3} \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 \\ B_1 B_2 B_3 \end{bmatrix} + \binom{n}{4} A_0^{n-4} \begin{bmatrix} A_1 A_2 \\ C_1 C_2 \end{bmatrix} + \binom{n}{5} A_0^{n-5} \begin{bmatrix} A_1 \\ D_1 \end{bmatrix}; \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

und die durch Klammern dargestellten Symbole producirte Summen aus den innerhalb dieser Klammern stehenden producirenden Reihen bedeuten. Stellt man, um noch mehr abzukürzen, durch die Zeichen

$$(20) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \left\{ {p \atop 2} \right\}; \; \left\{ {p \atop 3} \right\}; \; \left\{ {p \atop 4} \right\}; \; \ldots.; \; \left\{ {p \atop p} \right\}$$

die producirten Summen vor, welche aus der Verbindung der Reihe

$$(21) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A_1; \; A_2; \; A_3; \; A_4; \; A_5; \; A_6; \; \ldots.; \; A_{p-1};$$

mit den Reihen der verschiedenen Ordnungen:

$$(22) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \begin{cases} \text{I.} \; A_1 \, ; A_2 \, ; A_3 \, ; A_4 \, ; A_5 \, ; A_6 \, ; \ldots. ; A_{p-1} \, ; \\ \text{II.} \; 0 \, ; B_1 \, ; B_2 \, ; B_3 \, ; B_4 \, ; B_5 \, ; \ldots. ; B_{p-2} \, ; \\ \text{III.} \; 0 \, ; 0 \, ; C_1 \, ; C_2 \, ; C_3 \, ; C_4 \, ; \ldots. ; C_{p-3} \, ; \\ \text{IV.} \; 0 \, ; 0 \, ; 0 \, ; D_1 \, ; D_2 \, ; D_3 \, ; \ldots. ; D_{p-4} \, ; \\ \text{V.} \; 0 \, ; 0 \, ; 0 \, ; 0 \, ; E_1 \, ; E_2 \, ; \ldots. ; E_{p-5} \, ; \\ \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

hervorgehen; so hat man im Allgemeinen:

$$(23) \quad . \; \mathfrak{K}_m = \binom{n}{2} A_0^{n-2} \left\{ {m+1 \atop 2} \right\} + \binom{n}{3} A_0^{n-3} \left\{ {m+1 \atop 3} \right\} + \binom{n}{4} A_0^{n-4} \left\{ {m+1 \atop 4} \right\} + \ldots + \binom{n}{m+1} A_0^{n-m-1} \left\{ {m+1 \atop m+1} \right\}.$$

Die Ausdrücke für K_1, K_2, K_3, ... lassen sich durch ähnliche Formeln darstellen. Hierzu dient die Bemerkung, dass die Zahlen a_1, a_2, a_3, ... a_n auf die Werthe der Glieder, woraus die producirenden Reihen (22) bestehen, durchaus keinen Einfluss haben; nur treten hier an die Stelle der Multiplicatoren

$$(24) \quad . \; . \; . \; . \; . \; \binom{n}{2} A_0^{n-2}; \; \binom{n}{3} A_0^{n-3}; \; \binom{n}{4} A_0^{n-4}; \; \ldots; \binom{n}{m+1} A_0^{n-m-1}$$

die Factoren

$$(25) \quad . \; \frac{1}{1.2} f''(A_0); \; \frac{1}{1.2.3} f'''(A_0); \; \frac{1}{1.2.3.4} f^{IV} A_0); \; \ldots.; \; \frac{1}{(n-m-1)!} f^{(m+1)}(A_0)$$

welche wir in (12) durch die Zeichen

$$(26) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; M_1; \; M_2; \; M_3; \; \ldots.; \; M_m;$$

vorstellig gemacht haben.

Die Formeln (14) zeigen, dass jeder der Coëfficienten Z_2, Z_3, Z_4, ... aus zwei Theilen bestehe, von denen der erste den unveränderlichen Factor M enthält. Die zweiten Theile K_1, K_2, K_3, ... sind Summen, deren Summanden Producte aus den Multiplicatoren M_1, M_2, M_3, ... in die Ausdrücke A_1, A_2, A_3, ... B_1, B_2, B_3, ... C_1, C_2, C_3, ... D_1, D_2, D_3, ... sind. Hiernach würde sich das Schema zur Berechnung von K_m auf folgende Weise zur Darstellung bringen lassen:

Multiplicatoren	A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; . . . ; A_{m-1} ;
$\frac{1}{1.2} f''(A_0) = M_1$	A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; . . . ; A_{m-1} ;
$\frac{1}{1.2.3} f'''(A_0) = M_2$	0 ; B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 ; . . . ; B_{m-2} ;
$\frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(A_0) = M_4$	0 ; 0 ; C_1 ; C_2 ; C_3 ; . . . ; C_{m-3} ;
$\frac{1}{1.2.3.4.5} f^{V}(A_0) = M_5$	0 ; 0 ; 0 ; D_1 ; D_2 ; . . . ; D_{m-4} ;
. . . .	. . . .
1	0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; . . . ; H_{m-n+1} ;

wobei die Anzahl der Reihen $= n - 1$.

Man hat nun im Allgemeinen:

(27) . . . . $Z_m = M . A_m + K_{m-1}$;

worin

(28) . . . . $K_{m-1} = M_1 \left\{ {m \atop 2} \right\} + M_2 . \left\{ {m \atop 3} \right\} + M_3 \left\{ {m \atop 4} \right\} + \ldots + 1 . \left\{ {m \atop m} \right\}$.

Die Berechnung der producirten Summen

$$\left\{ {m \atop 2} \right\}, \left\{ {m \atop 3} \right\}, \left\{ {m \atop 4} \right\}, \ldots, \left\{ {m \atop m} \right\}$$

nimmt nun folgenden geregelten Gang.

Aus den Gliedern der Reihe (21) und (22) I. suche man die producirten Summen $B_1 B_2 B_3 \ldots$, welche man neuerdings als Glieder einer producirenden Reihe annimmt, und sie auf die Art, wie (22) II. zeigt, ansetzt. Eben so leite man aus den Gliedern der Reihe (21) und (22) II. die producirten Summen $C_1 C_2 C_3 \ldots$ her, die wieder als Glieder einer producirenden Reihe angenommen, und auf die Art (22) III. hingeschrieben werden. In gleicher Weise verbinde man die Glieder der Reihe (21) mit denen der Reihe (22) III, um aus ihnen die producirten Summen $D_1 D_2 D_3 \ldots$ abzuleiten; und schreibe dieselben, sie wieder als Glieder einer producirenden Reihe betrachtend, in der Art hin, wie (22) IV. zeigt, u. s. f. Aus diesen gefundenen Werthen setzen sich alsdann nach (13) die Werthe von $K_1 K_2 K_3 \ldots$ zusammen, durch deren Verbindung mit MA_2; MA_3; MA_4; ... nach (14) die Werthe von $Z_2 Z_3 Z_4 \ldots$ erhalten werden.

Nachdem ich die allgemeinen Formeln entwickelt habe, auf denen die Berechnung des aus der Substitution des Polynoms (2) in die ganze Function (1) für x hervorgehenden Polynoms (3) beruht, will ich sie durch Anwendung auf die einfachsten Fälle, da $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ gesetzt, noch erläutern, wobei $a_1 = a_2 = a_3 \ldots = a_4 = 0$ angenommen werde.

Entwicklung der zweiten Potenz eines Polynoms.

Wenn $n = 2$; so hat man

(29) . . . . $x^2 = (A_0 + A_1 . z + A_2 . z^2 + A_3 . z^3 + \ldots)^2$.

Zur Berechnung der Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von z in dieser entwickelten Potenz kommt mit der producirenden Reihe (21) nur eine einzige producirende Reihe der ersten Ordnung,

nämlich die Reihe I. aus den Reihen (22) zu verbinden. Der dieser Reihe entsprechende Multiplicator ist $\binom{n}{2} A_0^{n-2} = 1$; und das Schema der Rechnung wird sein:

Multiplicator	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	.....
1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	.....

Hieraus folgt also nach dem Gesetze der producirten Summen:

$$(30) \quad \ldots\ldots \begin{cases} K_1 = A_1 A_1 = A_1^2; \\ K_2 = A_1 A_2 + A_2 A_1 = 2A_1 A_2; \\ K_3 = A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1 = 2A_1 A_3 + A_2^2; \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

woraus man endlich hat:

$$(31) \quad \ldots\ldots \begin{cases} Z_1 = 2A_0 . A_1; \\ Z_2 = 2A_0 . A_2 + K_1; \\ Z_3 = 2A_0 . A_3 + K_2; \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Entwicklung der dritten Potenz eines Polynoms.

Wenn $n = 3$; so hat man

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad x^3 = (A_0 + A_1 . z + A_2 . z^2 + A_3 . z^3 + \ldots)^3.$$

Zur Berechnung der Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von z in dieser entwickelten Potenz kömmt mit der producirenden Reihe (21) eine producirende Reihe der ersten Ordnung, nämlich die Reihe I. aus den Reihen (22), und eine producirende Reihe der zweiten Ordnung, nämlich die Reihe II. aus den Reihen (22) zu verbinden. Die diesen Reihen entsprechenden Multiplicatoren sind $3A_0$ und 1; und das Schema der Rechnung wird sein

Multiplicatoren	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	.....
$3A_0$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	.....
1	0	B_1	B_2	B_3	B_4	.....

Hieraus folgt nach dem Gesetze der producirten Summen

$$(33) \quad \ldots\ldots \begin{cases} K_1 = 3A_0 . A_1 A_1 + 1 . 0 = 3A_0 A_1^2; \\ K_2 = 3A_0 .(A_1 A_2 + A_2 A_1) + 1 . (A_1 . B_1 + A_2 . 0) \\ \quad = 6A_0 A_1 A_2 + A_1^3; \\ K_3 = 3A_0 .(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 . A_1) + 1 . (A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_3 . 0) \\ \quad = 6A_0 A_1 A_3 + 3A_0 A_2^2 + 3A_1^2 A_2. \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

woraus man endlich hat

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} Z_1 = 3A_0^2 . A_1; \\ Z_2 = 3A_0^2 . A_2 + K_1; \\ Z_3 = 3A_0^2 . A_3 + K_2; \\ Z_4 = 3A_0^2 . A_4 + K_3; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Entwicklung der vierten Potenz eines Polynoms.

Wenn $n=4$, so hat man

$$(35) \quad \ldots\ldots \quad x^4 = (A_0 + A_1 . z + A_2 . {}^2 + A_3 . z^3 + \ldots .)^4.$$

In diesem Falle kömmt mit der producirenden Reihe (21) aus den Reihen (22) die der ersten, zweiten und dritten Ordnung zu verbinden, also die Reihe I., II. und III. Die diesen Reihen entsprechenden Multiplicatoren sind $6A_0^2$; $4A_0$; 1, und das Schema der Rechnung wird sein

Multiplicatoren	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
$6A_0^2$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
$4A_0$	0	B_1	B_2	B_3	B_4	...
1	0	0	C_1	C_2	C_3	...

Hieraus findet man

$$(36) \quad \ldots \quad \begin{cases} K_1 = 6A_0^2 . A_1 A_1 = 6A_0^2 A_1^2 \\ K_2 = 6A_0^2 .(A_1 A_2 + A_2 A_1) + 4A_0 . A_1 B_1 = 12 A_0^2 A_1 A_2 + 4A_0 A_1^3; \\ K_3 = 6A_0^2 .(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1) + 4A_0 . (A_1 B_2 + A_2 B_1) + 1 . A_1 C_1 \\ \quad = 12 A_0^2 . A_1 A_3 + 6A_0^2 A_2^2 + 12 A_0 A_1^2 A_2 + A_1^4; \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

woraus man endlich hat

$$(37) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} Z_1 = 4A_0^3 . A_1 \\ Z_2 = 4A_0^3 . A_2 + K_1; \\ Z_3 = 4A_0^3 . A_3 + K_2; \\ Z_4 = 4A_0^3 . A_4 + K_3; \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wir wollen endlich noch die Fälle, da $n=2$, $n=3$, $n=4$ angenommen wird, unter der Voraussetzung betrachten, da $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ nicht sämmtlich verschwinden. Den oben aufgestellten allgemeinen Formeln zu Folge wird sich die Berechnung der Coëfficienten des Polynoms (3) von der Berechnung der Coëfficienten der Potenzen des Polynoms $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ nur in den Multiplicatoren unterscheiden.

Wenn also $n=2$, d. i. $f(x) = x^2 + a_1 x + a_2$;

so findet man

$$(38) \quad \ldots\ldots\ldots \quad M = 2A_0 + a_1 \; ; \quad M_1 = 1$$

Hier kömmt also mit der producirenden Reihe (21) nur (22) I. zu verbinden.

Das Schema der Rechnung ist

Multiplicator	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...

und $$Z_1 = M.A_1;\quad Z_2 = M.A_2 + K_1;\quad Z_3 = M.A_3 + K_2;\ \ldots,$$
worin $$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots$$
nach den Formeln (30) berechnet werden.

Wenn $$n = 3,\ \text{d. i. } f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3;$$
so findet man

$$(39)\quad \ldots\ldots \quad M = 3A_0^2 + 2a_1 A_0 + a_2;\quad M_1 = 3A_0 + a_1;\quad M_2 = 1.$$

Hier kommen mit der producirenden Reihe (21) nur I. und II. aus (22) zu verbinden.

Das Schema der Rechnung ist

Multiplicatoren						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
$3A_0 + a_1$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
1	0	B_1	B_2	B_3	B_4	...

und $$Z_1 = M.A_1;\quad Z_2 = M.A_2 + K_1;\quad Z_3 = M.A_3 + K_2;\ \ldots$$
worin $$K_1,\ K_2,\ K_3,\ \ldots$$
nach den Formeln
$$K_1 = (3A_0 + a_1).A_1 A_1;$$
$$K_2 = (3A_0 + a_1).(A_1 A_2 + A_2 A_1) + 1.A_1 B_1;$$
$$K_3 = (3A_0 + a_1).(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_2) + 1.(A_1 B_2 + A_2 B_1);$$
u. s. f. zu berechnen sind.

Wenn $$n = 4,\ \text{d. i. } f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4;$$
so findet man

$$(40)\quad M = 4A_0^3 + 3a_1 A_0^2 + 2a_2 A_0 + a_3;\quad M_1 = 6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2;\quad M_2 = 4A_0 + a_1;\quad M_3 = 1.$$

Hier kommen mit der producirenden Reihe (21) nur I., II. und III. aus (22) zu verbinden.

Das Schema der Rechnung ist

Multiplicatoren						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
$6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	...
$4A_0 + a_1$	0	B_1	B_2	B_3	B_4	...
1	0	0	C_1	C_2	C_3	...

und $$Z_1 = M.A_1;\quad Z_2 = M.A_2 + K_1;\quad Z_3 = M.A_3 + K_2;\ \ldots$$
worin

$$(41)\quad \begin{cases} K_1 = (6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2).A_1 A_1 \\ K_2 = (6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2).(A_1 A_2 + A_2 A_1) + (4A_0 + a_1)(A_1 B_1); \\ K_3 = (6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2).(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1) + (4A_0 + a_1)(A_1 B_2 + A_2 B_1) + 1.A_1 C_1; \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Nachdem wir die Gesetze betrachtet haben, Potenzen und ganze Functionen von Ausdrücken, welche nach der Grundform der Algebra gebaut sind, in eben solche Formen wieder zu entwickeln, wollen wir im Folgenden weiter untersuchen, wie diese Ausdrücke benützt werden können um für die Radication und für die Auflösung der höhern Gleichungen einen entsprechenden Rechnungsmechanismus zu erhalten.

§. II.

Entwicklung eines eigenthümlichen Rechnungsmechanismus für die Radication.

Bei der Radication d. i. bei der Ausziehung der Wurzel irgend eines Grades aus einer vorgelegten dekadischen Zahl, oder aus einem nach Potenzen einer Hauptzahl fortschreitenden Polynom wird eine Zahl oder ein Polynom von derselben Form gesucht, so zur Potenz des gegebenen Wurzelexponenten erhoben die vorgelegte Zahl oder das gegebene Polynom zum Vorschein bringt. Wenn das vorgelegte Polynom kein Erzeugniss einer wirklichen Potenzirung eines andern Polynoms von geschlossener Gliederanzahl ist, so lässt sich keine Summe von Gliedern in geschlossener Form angeben, welche potenzirt das vorgelegte Polynom zum Vorschein brächte. In einem solchen Falle kann man immer nach einem Polynom fragen, dessen Glieder bis zu einem gegebenen Grade aufsteigen, und welches die Beschaffenheit besitzt, zu einer vorgeschriebenen Potenz erhoben, ein Resultat darzubieten, das mit dem vorgelegten Polynom in allen seinen Gliedern, vom Anfangsgliede an, bis zum Gliede von jenem beliebigen Range hinauf, übereinstimmen. Und diese Frage, so gestellt, kann auf diejenige zurückgebracht werden, bei der angenommen wird, dass das vorgelegte Polynom eine wirkliche Potenz eines andern Polynoms von geschlossener Gliederzahl sei. Wir wollen nun zuvörderst die einzelnen Fälle betrachten, da der Wurzelexponent 2, 3, 4 oder 5 ist.

A) Entwicklung eines Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der Quadratwurzeln aus Polynomen und dekadischen Zahlen.

Wenn ein vorgelegtes Polynom:

(1) . . . . $Z_0 + Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \ldots\ldots$

als ein wirkliches Erzeugniss der Multiplication des Polynoms

(2) . . . . $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots\ldots$

mit sich selbst betrachtet wird, d. h. wenn man annimmt, dass

$$Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots . = (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots .)^2;$$

so hängen die Coëfficienten

(3) . . . . $Z_0;\ Z_1;\ Z_2;\ Z_3;\ \ldots .$

von den Coëfficienten

(4) . . . . $A_0;\ A_1;\ A_2;\ A_3;\ \ldots .$

und umgekehrt diese von jenen nach Gesetzen ab, welche im vorhergehenden §. entwickelt worden sind. Diese Abhängigkeit wird uns dazu dienen, um alle Glieder des Radicals

(5) . . . . $\sqrt{(Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots)},$

sobald dasselbe in der Gestalt (2) ausgedrückt werden soll, d. h. um alle Coëfficienten (4) successive aus den gegebenen Coëfficienten (3) zu finden.

Die Gleichung $Z_0 = A_0^2$, welche ausdrückt, dass das niedrigste (oder höchste) Glied des Quadrates mit der zweiten Potenz des niedrigsten oder höchsten Gliedes seiner Wurzel zusammenfällt, gibt unmittelbar

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A_0 = \sqrt{Z_0}.$$

Man ziehe also dieselbe Wurzel, welche aus einem, nach der Hauptform der Algebra gebauten Polynome gezogen werden soll, bloss aus dem ersten Gliede dieses Polynoms, so gibt diese Wurzel das erste Glied des Polynoms, welche die zweite Wurzel des vorgelegten ist. Aus diesem so erhaltenen Gliede, und mittelst der gegebenen Coëfficienten $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots$ lassen sich nun sofort auf eine sehr einfache Weise die Werthe der Coëfficienten $A_1, A_2, A_3 \ldots$ finden, wozu es blosser Divisionen bedarf. Das System der hiezu nöthigen Operationen erhält nun einen gleichförmigen und geregelten Gang.

I. Wenn man die zweite Potenz $A_0^2 = Z_0$ des gefundenen ersten Gliedes der Wurzel von dem vorgelegten Polynom abzieht, so erhält man als ersten Rest

$$R_1 = Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \ldots.$$

worin

$$Z_1 = 2A_0 . A_1 .$$

Hierbei hat man nicht nöthig, stets alle Glieder des vorgelegten Polynoms herabzusetzen; es reicht hin, diess nur mit dem Hauptgliede $Z_1 . z$ zu thun. Wenn man nun dessen Form

$$\mathfrak{D}_1 = 2A_0 . A_1 z$$

betrachtet, so wird es klar, dass, wenn man dasselbe durch den Divisor $2A_0$, d. i. durch den doppelten schon gefundenen ersten Theil der Wurzel dividirt, das zweite Glied $A_1 z$ der Wurzel erhalten werde. Dieses Glied werde wieder mit dem Divisor $2A_0$ multiplicirt, und von jenem Reste abgezogen; und im neuen Reste bleiben alle jene Glieder des gegebenen Polynoms stehen, welche auf das zweite Glied folgen.

II. Mit Hinweglassung des ersten Gliedes aus dem vorigen Reste bleibt als zweiter Rest stehen:

$$R_2 = Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \ldots.$$

worin

$$Z_2 = 2A_0 . A_2 + K_1 \text{ und } K_1 = A_1 . A_1 .$$

Es ist hinreichend, von den Gliedern dieses Restes bloss das erste Hauptglied $Z_2 . z^2$ zu betrachten, weil aus diesem Gliede allein das folgende Glied der Wurzel gefunden werden kann. Die Form dieses Gliedes lässt erkennen, dass, wenn man den Theil $K_1 z^2$ abzieht, ein partieller Dividend

$$\mathfrak{D}_2 = 2A_0 . A_2 z^2$$

übrig bleiben werde, der die Beschaffenheit besitzt, dass er, durch $2A_0$ dividirt, das dritte Glied $A_2 z^2$ der Wurzel gibt. Der abzuziehende Theil

$$K_1 z^2 = A_1^2 . z^2 ,$$

welchen ich die erste Correction nennen werde, wird erhalten, wenn man aus den bereits bekannten Gliedern

$$A_1 z$$
$$A_1 z$$

die producirte Summe nimmt, welche hier mit dem Producte der beiden Glieder einerlei ist.

III. Als neuen Rest setze man das nächst folgende Hauptglied

$$R_3 = Z_3 z^3 + \ldots$$

herab, um nach ähnlicher Regel aus ihm das folgende Glied der Wurzel abzusondern. Es ist aber klar, dass, wenn man von der Form

$$Z_3 z^3 = 2A_0 A_3 z^3 + K_2 z^3,$$

worin

$$K_2 z^3 = 2A_1 A_2 z^3,$$

das Glied $K_2 z^3$ absondert, ein partieller Dividend

$$\mathfrak{D}_3 = 2A_0 . A_3 z^3$$

übrig bleiben werde, der die Beschaffenheit besitzt, dass er, durch $2A_0$ dividirt, das vierte Glied $A_3 z^3$ der Wurzel gibt. Der abzuziehende Theil $K_2 z^3$, den ich die zweite Correction nennen werde, wird erhalten, wenn man aus den schon bekannten Gliedern

$$\begin{matrix} A_1 z; & A_2 z^2 \\ A_1 z; & A_2 z^2 \end{matrix}$$

die producirte Summe nimmt.

IV. Der neue Rest besteht aus den folgenden Gliedern des vorgelegten Polynoms. Es ist hinreichend, bloss das nächste Glied $Z_4 z^4$ zu betrachten, da aus ihm allein das nächst folgende Glied der Wurzel erhalten werden kann. Wenn man daher aus diesem Reste

$$R_4 = Z_4 z^4 + \ldots\ldots$$

worin

$$Z_4 z^4 = 2A_0 . A_4 z^4 + K_3 z^4,$$

und

$$K_3 z^4 = 2A_1 A_3 . z^4 + A_2 A_2 z^4,$$

den Theil $K_3 z^4$ hinwegnimmt, so bleibt ein partieller Dividend

$$\mathfrak{D}_4 = 2A_0 . A_4 z^4$$

übrig, der die Beschaffenheit hat, dass er, durch $2A_0$ dividirt, das fünfte Glied $A_4 z^4$ der Wurzel gibt. Der abzuziehende Theil $K_3 z^4$, den ich die dritte Correction nennen werde, wird erhalten, wenn man aus den schon bekannten Gliedern

$$\begin{matrix} A_1 z; & A_2 z^2; & A_3 z^3 \\ A_1 z; & A_2 z^2; & A_3 z^3 \end{matrix}$$

die producirte Summe sucht.

Aus dem unveränderlichen Gange der bisherigen Schlüsse wird die Art und Weise klar, wie sich alle Glieder der Wurzel des zweiten Grades aus einem gegebenen Polynom, dessen Glieder nach Potenzen einer Hauptzahl fortschreiten, successive entwickeln lassen.

Jedes Glied des vorgelegten Polynoms, im Allgemeinen $Z_m . z^m$, wird nämlich das entsprechende Glied in seiner Wurzel, das von eben demselben Range ist, nämlich $A_m . z^m$ geben, indem man an jenem die Correction $K_{m-1} z^m$ anbringt, d. h. von ihm ein Glied abzieht, das als eine producirte Summe aus zwei producirenden Reihen erhalten wird, aus den Reihen

$$A_1 . z \; ; \; A_2 . z^2 \; ; \; A_3 . z^3 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; A_{m-1} . z^{m-1} \; ;$$
$$A_1 . z \; ; \; A_2 . z^2 \; ; \; A_3 . z^3 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; A_{m-1} . z^{m-1} \; ;$$

deren Glieder sämmtlich bekannt sind. Der Rest gibt den partiellen Dividend

$$\mathfrak{D}_m = 2A_0 . A_m z^m ,$$

der nun die Beschaffenheit hat, dass er, durch $2A_0$ dividirt, das nächste Glied $A_m . z^m$ der Wurzel gibt. Wenn das gegebene Polynom ein wirkliches Erzeugniss der Potenzirung eines andern Polynoms von eben derselben Form mit 2 ist; so gelangt man einmal zum Reste 0, und das so erhaltene Polynom von geschlossener Gliederzahl ist alsdann die gesuchte Quadratwurzel des gegebenen Polynoms.

Will man die successiven Glieder der Quadratwurzel aus einem, nach Potenzen einer Hauptzahl fortschreitenden, Polynom finden; so wird sich zu deren Bestimmung wohl kaum eine bequemere und kürzere Regel angeben lassen. Aus ihr lässt sich ohne Mühe ein leichter Rechnungsmechanismus herleiten. In der Absicht darf man nur, nachdem das erste Glied A_0 durch eine partielle Quadratwurzelausziehung aus dem ersten Gliede Z_0 des vorgelegten Polynoms gefunden worden ist, das doppelte desselben, also $2A_0$, welches ich den assignirten Divisor nennen will, von den übrigen Gliedern der Reihe zu trennen, und die, allmählig durch die Division der ersten Glieder der verbesserten Reste mit $2A_0$ erhaltenen, partiellen Quotienten neben das erste Glied A_0 der Wurzel in eben derselben Ordnung hinschreiben, so wie sie durch die partiellen Divisionen der verbesserten Reste durch $2A_0$ allmählig hervorgehen; die auf das Glied A_0 folgenden Glieder aber, Behufs der Berechnung der Correctionen, darunter noch einmal wiederholen, weil so die Glieder der Quadratwurzel sogleich als Glieder derjenigen producirenden Reihen verwendet werden können, welche in ihren producirten Summen sogleich die Correctionen der betreffenden Reste darbieten.

Diese Anordnung der Rechnung wird sich nun in folgendem Schema zur Darstellung bringen lassen:

$$\sqrt{[Z_0 + Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + Z_4 . z^4 + \ldots.]} = A_0$$
$$A_0^2$$
$$R_1 = \;\ldots\; \underline{2A_0 A_1 z + \ldots.} \; : \; 2A_0 \frac{A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots}{A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots}$$
$$\underline{2A_0 A_1 z}$$
$$R_2 = \;\ldots\ldots\ldots\; + (2A_0 A_2 + K_1) z^2 + \ldots$$
$$\text{I. Correction } K_1 z = \quad \underline{A_1^2 z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \binom{A_1 z}{A_1 z}$$
$$2A_0 A_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots$$
$$\underline{2A_0 A_2 z^2}$$
$$R_3 = \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; + (2A_0 A_3 + K_2) z^3 + \ldots$$
$$\text{II. Correction } K_2 z^3 = \;\ldots\ldots\; \underline{(A_1 A_2 + A_2 A_1) z^3 \;\ldots.} = \binom{A_1 z \, ; \, A_2 z^2}{A_1 z \, ; \, A_2 z^2}$$
$$2A_0 A_3 z^3 + \ldots.$$
$$\underline{2A_0 A_3 z^3}$$
$$R_4 = \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; + (2A_0 A_4 + K_3) z^4 + \ldots$$
$$\text{III. Correction } K_3 z^4 = \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \underline{(A_1 A_3 + A_2 A_2 + A_3 A_1) z^4 \ldots} = \binom{A_1 z \, ; \, A_2 z^2 \, ; \, A_3 z^2}{A_1 z \, ; \, A_2 z^2 \, ; \, A_3 z^3}$$
$$2A_0 A_4 z^4 \quad + \ldots$$
$$\underline{2A_0 A_4 z^4}$$
$$R_5 = \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; + (2A_0 A_5 + K_4) z_5 + \ldots$$

u. s. f.

Beispiel. $\sqrt{(1-4z+6z^2+4z^3-z^4)}=1$

$$\begin{array}{l}
1 \\
\hline
-4z+\,..\;:\;2\dfrac{-2z+z^2+4z^3+7z^4+10z^5+5z^6+\,..}{-2z+z^2+4z^3+7z^4+10z^5+5z^6+\,..} \\
-4z \\
\hline
+6z^2+\,.. \\
\text{I. Corr. . . } +4z^2 \\
\hline
+2z^2+\,.. \\
+2z^2 \\
\hline
+4z^3-\,.. \\
\text{II. Corr. . . . . } -4z^3 \\
\hline
+8z^3-\,.. \\
+8z^3 \\
\hline
-\;z^4 \\
\text{III. Corr. . . . . } -15z^4 \\
\hline
+14z^4 \\
+14z^4 \\
\hline
+0.z^5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
+\;0.z^5 \\
\text{IV. Corr. . . } -20.z^5 \\
\hline
+20.z^5 \\
+20.z^5 \\
\hline
+\;0.z^6 \\
\text{V. C. . . . . . } -10.z^6 \\
\hline
+10.z^6 \\
+10.z^6 \\
\hline
+0.z^7 \\
\text{u. s. f.}
\end{array}$$

Die gesuchte Wurzel ist also

$$1-2z+z^2+4z^3+7z^4+10z^5+5z^6\ldots$$

Dieses Schema der Rechnung lässt sich noch bequemer auf folgende Art zusammenziehen:

$$\sqrt{(1-4z+6z^2+4z^3-z)^4}=1$$

$$\begin{array}{l}
1 \\
\hline
-4z\;:\;2\dfrac{-2z+z^2+4z^3+7z^4+10z^5+5z^6+\ldots}{-2z+z^2+4z^3+7z^4+10z^5+5z^6+\ldots} \\
-4z
\end{array}$$

	$+6z^2$	$+4z^3$	$-\;z^4$	$0.z^5$	$0.z^6$	$0.z^7$
Correctionen . . .	$+4z^2$	$-4z^3$	$-15z^4$	$-20z^5$	$-10z^6$	etc.
	$+2z^2$	$+8z^3$	$+14z^4$	$+20z^5$	$+10z^6$	

Aus den vorhergehenden Formeln entwickelt sich ohne Mühe der Rechnungsmechanismus für die Ausziehung der Quadratwurzeln aus dekadischen Zahlen.

Wenn A_0 und Z_0 ganze dekadische Zahlen, ferner

$$A_0,\, A_1,\, A_2, \ldots Z_1,\, Z_2,\, Z_3, \ldots$$

einzifferige Zahlen sind, und $\qquad Z=\frac{1}{10}$;

so drücken die Polynome

$$A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots \text{ und } Z_0+Z_1.z+Z_2.z^2+Z_3.z^3+\ldots$$

dekadische Zahlen mit angehängten Decimalbrüchen aus.

Der im Vorhergehenden erklärte Rechnungsmechanismus bleibt im Wesentlichen derselbe, wenn es sich darum handelt, um aus den successiven Ziffern einer vorgelegten dekadischen Zahl, aus der man die Wurzel des zweiten Grades ziehen soll, nach und nach die Ziffern zu finden, mit denen diese Wurzel geschrieben wird. Man suche die Grenzen der Wurzel auf die bekannte Weise, die kleinere derselben, welche mit einer oder mehr Ziffern geschrieben sein kann, wird die mit A_0 bezeichnete Zahl sein. Um nun die auf dieses erste Glied A_0 folgenden Ziffern der Wurzel zu erhalten, ziehe

man die zweite Potenz von A_0 von der gegebenen Zahl gehörig ab, stelle das Doppelte dieses schon gefundenen Theiles der Wurzel als den assignirten Divisor auf, den man neben dem ersten Rest rechter Hand anschreiben, und von diesem durch ein Zeichen trennen kann, und dividire hierauf jenen Rest durch ihn. Die nach und nach auf eine geregelte Weise zu erhaltenden Ziffern der Wurzel kann man über einen horizontalen, neben den Divisor gezogenen Strich ansetzen, und sie unter demselben, Behufs der Berechnungen späterer Correctionen wiederholt anschreiben. Dividirt man hierauf den, nach bewerkstelligter Subtraction der zweiten Potenz von A_0 von der vorgelegten Zahl erhaltenen Rest, nachdem man früher zu ihm aus der gegebenen Zahl eine Ziffer, die nächste nämlich, die von jener Subtraction noch unberührt geblieben ist, herabgesetzt hat, durch den assignirten Divisor $2A_0$, so gibt der ganzzahlige Theil dieses Quotienten jene Ziffer, welche in der Wurzel auf den Theil A_0 folgt. Dieselbe werde nun über den horizontalen Strich, und wiederholt unter demselben, zunächst nach A_0 zur Rechten hingeschrieben. Das Product aus ihr in den assignirten Divisor werde hier auch von jenem Reste abgezogen, und diesem neuen Unterschiede werde rechts die nächste Ziffer aus der gegebenen Zahl angehängt. Endlich werde an der so erhaltenen Zahl die erste Correction angebracht.

Von hier aus nimmt nun die Rechnung einen gleichförmigen und geregelten Gang, um Ziffer für Ziffer der Wurzel aus den nachfolgenden einzelnen Ziffern der Zahl zu finden.

Für diese nachfolgenden Rechnungen dient zur allgemeinen Regel, dass allemal, als man im Laufe der Rechnung zu dem, durch die vorausgegangene Operation der Subtraction erhaltenen, Reste eine neue nächstfolgende Ziffer aus der vorgelegten Zahl herabgesetzt hat, an der so erhaltenen Zahl eine Correction anzubringen sei. Sie bildet sich im Allgemeinen nach dem Gesetze der producirten Summen aus zwei producirenden Reihen, wozu die bereits gefundenen, auf den Theil A_0 folgenden, über und unter dem horizontalen Striche angesetzten Ziffern die respectiven Glieder liefern. Diese Correction kann, als eine nach einem bestimmten Gesetze aus schon bekannt gewordenen Ziffern der Quadratwurzel herleitbare Zahl stets nur eine bekannte Zahl sein. Jeden auf diese Art verbesserten Rest (partiellen Dividend) dividire man sofort durch den assignirten Divisor. Der ganzzahlige Theil dieses Quotienten liefert eine neue Ziffer der Quadratwurzel, die man den durch die frühern Operationen schon gefundenen Ziffern über und unter dem horizontalen Striche weiter anzureihen hat, um sie so zur Bildung der Correctionen nachfolgender Reste wieder verwenden zu können. Das Product aus einer solchen letztgefundenen Ziffer der Wurzel in den assignirten Divisor von dem letzten verbesserten Reste abgezogen gibt einen neuen Unterschied, dem man rechts die nächstfolgende Ziffer aus der gegebenen Zahl anzuhängen hat, um, nach angebrachter Correction an demselben, durch partielle Division des verbesserten Restes mit dem assignirten Divisor eine neue Ziffer der Quadratwurzel zu erhalten. Mittelst dieses Rechnungsmechanismus lässt sich die Quadratwurzel aus einer vorgelegten Zahl so genau als man nur immer will finden.

Wir wollen, um diese verschiedenen Regeln durch ihre Anwendung in einem besondern Falle zu erläutern, den Werth von $\sqrt{86}$ in acht Ziffern suchen, von welchem wir wissen, dass er zwischen den Grenzen 9 und 10 liege.

Nachdem man die untere Grenze 9 hinter dem Gleichheitszeichen angesetzt, und deren Quadrat 81 von 86 abgezogen hat, hänge man dem Reste 5 eine Null an, trenne von dieser Zahl 50 das Doppelte der untern Grenze, d. i. die Zahl 18 durch einen kleinen verticalen Strich, und setze neben diesen assignirten Divisor 18 einen horizontalen Strich. Man dividire hierauf 50 durch 18, setze den partiellen Quotienten 2 über und unter jenen horizontalen Strich, und ziehe das Product aus 2 und 18, d. i. die Zahl 36 von 50 ab. Dem Reste 14 hänge man wieder eine Null an, bringe an 140 die erste Correction 4 an, und dividire den ersten partiellen Dividend 136 durch den assignirten Divisor 18. Den erhaltenen partiellen Quotienten 7 setze man über und unter dem horizontalen Striche hinter 2 an, ziehe das Product aus 7 und 18, d. i. 126 von 136 ab, und setze dem Reste 10 wieder 0 bei, u. s. f.

Die Rechnung gestaltet sich hiernach folgendermassen:

	$\sqrt{86} = 9$
	81
	$50 \;\big|\; 18\frac{2736185\ldots}{2736185\ldots}$
	$36 = 18.2;$
	140
I. Correction	$4 = 2.2 \text{ aus } \binom{2}{2};$
I. part. Divid.	136
	$126 = 18.7;$
	100
II. Correction	$28 = 2.7 + 7.2 \text{ aus } \binom{27}{27};$
II. part. Divid.	72
	$54 = 18.3;$
	180
III. Correction	$61 = 2.3 + 7.7 + 3.2 \text{ aus } \binom{273}{273};$
III. part. Divid.	119
	$108 = 18.6;$
	110
IV. Correction	$66 = 2.6 + 7.3 + 3.7 + 6.2 \text{ aus } \binom{2736}{2736};$
IV. part. Divid.	44
	$18 = 18.1;$
	260
V. Correction	$97 = 2.1 + 7.6 + 3.3 + 6.7 + 1.2 \text{ aus } \binom{27361}{27361};$
V. part. Divid.	163
	$144 = 18.8;$
	190
VI. Correction	$82 = 2.8 + 7.1 + 3.6 + 6.3 + 1.7 + 8.2 \text{ aus } \binom{273618}{273618}$
VI. part. Divid.	108
	$90 = 18.5;$
	180 u. s. f.

Hiernach ist $\sqrt{86} = 9,2736185\ldots$

Um zu sehen, mit welcher Einfachheit der Rechnungsmechanismus die Ziffern der Wurzel gibt, will ich noch einige Beispiele hieher setzen:

$\sqrt{53} = 7$

	49		
	40	$14\frac{2801098\ldots}{2801098\ldots}$	
	28		
	120		160
I. . .	4	V. . . .	16
	116		144
	112		126
	40		160
II. . . .	32	VI.	36
	80		124
III. . . .	64		112
	16		120
	14		u. s. f.
	20		
IV.	4		
	16		

$\sqrt{129} = 11$

	121		
	80	$22\frac{3578166\ldots}{3578166\ldots}$	
	66		
	140		170
I. . . .	9	IV. . .	118
	131		52
	110		22
	210		300
II. . . .	30	V. . .	135
	180		165
	154		132
	260		330
III.	67	VI. . . .	158
	193		172
	176		132
	17		400
			u. s. f.

Hiernach ist $\sqrt{53} = 7{,}2801098\ldots$ Hiernach ist $\sqrt{129} = 11{,}3578166\ldots$

Um $\sqrt{71}$ zu finden, wollen wir annehmen, dass man einen zweizifferigen höchsten Theil, 8, 4, kenne. Um die folgenden Decimalziffern der Wurzel zu erhalten, führe man die Rechnung auf folgende Art:

$\sqrt{71} = 8{,}4$

7056

440 | $168\frac{2614976724}{2614976724}$

336

1040	280	880	1680	1400	1290	1380	620	980	670
4	24	40	28	85	144	142	186	241	u. s. f.
1036	256	840	1652	1315	1146	1238	434	739	
1008	168	672	1512	1176	1008	1176	336	672	
28	88	168	140	129	138	62	98	67	

Hiernach ist $\sqrt{71} = 8{,}42614976724\ldots$

Wenn man zur Bildung des ersten Theils der Wurzel A_0, somit auch zur Bildung des assignirten Divisors $2A_0$ eine zu geringe Anzahl von Ziffern anwendet, so kann es geschehen, dass eine Correction grösser wird, als diejenige Zahl ist, an der man sie eben anzubringen hat. In einem solchen Falle muss man die zuletzt gefundene Ziffer der Wurzel um eine, zuweilen um zwei Einheiten erniedrigen, damit eine solche Correction angebracht werden könne. Mit einer solchen Aenderung einer zu hoch angesetzten Ziffer der Quadratwurzel ist nothwendig eine Wiederholung der Rechnung verknüpft. Indessen kann das Eintreten solcher Fälle vermieden werden, wenn man dafür sorgt, dass der assignirte Divisor eine drei- oder vierzifferige Zahl werde. Es ist daher zweckmässiger, gleich anfänglich einen hinlänglich grossen Divisor zu verwenden. Dieser Zweck kann im Laufe der Rechnung selber durch Aenderung des assignirten Divisors erreicht werden, sofern man nur die Regel beobachtet, die Correctionen um eine eben so grosse Anzahl zu vermehren, als die Ziffern in A_0.

So z. B. kann die Berechnung des Werthes von $\sqrt{86}$ auch noch in folgender Weise geschehen:

```
√86=9
 81
 ──
  50|18 2/2
  36
  ───
  140
    4
  ────
  1360|184 7361850../7361850..
  1288
  ────
   720
    49=7.7;
   ───
   671
   552
   ────
   1190
     42=7.3+3.7;
   ────
   1148
   1104
   ────
     44 . . . . —

— | 440
     93=7.6+3.3+6.7;
   ───
   347
   184
   ────
   1630
     50=7.1+3.6+6.3+1.7;
   ────
   1580
   1472
   ────
    1080
     154=7.8+3.1+6.6+1.3+8.7;
    ───
     932
     920
     ───
     120 u. s. f.
```

Dessgleichen kann der Werth von $\sqrt{29}$ auf die eine oder die andere der nachfolgenden Arten erhalten werden:

```
√29=5
 25
 ──
  40|10 3/3
  30
  ───
  100
    9
  ───
  910|106 851648.../851648...
  848
  ───
  620 | 740 | 1000
   64 |  41 |  125
  ─── | ─── | ────
  556 | 699 |  875
  530 | 636 |  848
  ─── | ─── | ────
  260 | 630 |  260
   80 | 106 | u. s. f.
  ─── | ─── |
  180 | 524 |
  106 | 424 |
  ─── | ─── |
   74 | 100 |
```

```
√29=5
 25
 ──
  40|10 38/38
  30
  ───
  100
    9
  ───
   91
   80
  ───
  110
   48=3.8+8.3;
  ───
  620
   64=8.8;
  ────
  5560|1076 51648./51648..
  5380
  ────
  1800 | 6990 | 5240 | 8750 | 180
    25 |   10 |   61 |  124 | u. s. f.
  ──── | ──── | ──── | ──── |
  1775 | 6980 | 5179 | 8626 |
  1076 | 6456 | 4304 | 8608 |
  ──── | ──── | ──── | ──── |
   699 |  524 |  875 |   18 |
```

Hiernach ist $\sqrt{29} = 5{,}3851648..$

Es ist eine bemerkenswerthe Eigenschaft unseres Rechnungsmechanismus, dass der assignirte Divisor im Laufe der Rechnung mehreremal geändert werden könne, und dass es gestattet sei, wieder zu einem der frühern Divisoren zurückzukehren, sofern man nur in eben dem Verhältnisse, als man die Anzahl der Ziffern des Divisors vermehrt oder vermindert, gleichzeitig auch die der Correctionen vermehre oder vermindere, wie die Vergleichung der drei Arten, den Werth von $\sqrt{72}$ zu finden, zeigt:

$\sqrt{72}=8$
64
80 | 16 $\frac{4}{4}$
64
160
16
144
128
160
64
96
80
160
104
560 | 168 $\frac{8528137..}{8528137..}$
80
480
336
1440
57
1383
1344
390
148
242
168
740
100
640
504
1360
90
1270
1176
940
u. s. f.

$\sqrt{72}=8$
64
80 | 16 $\frac{4}{4}$
64
160
16
1440 | 168 $\frac{85}{85}$
1344
960
64
896
840
560
80
4800 | 1696 $\frac{52}{52}$
25
4775
3392
1383 | 168 $\frac{8528}{8528}$
1344
39 | 16 $\frac{485281}{485281}$
16
230
156
740 | 168 $\frac{8528137}{8528137}$
100
640
504
1360
90
1270
1176
940
u. s. f.

$\sqrt{72}=8$
64
80 | 16 $\frac{48}{48}$
64
160
16
144
128
160
64
960 | 168 $\frac{85}{85}$
64
896
840
560
80
4800 | 1696 $\frac{528}{528}$
25
4775
3392
13830
20
13810
13568
2420
84
23360 | 16970 $\frac{281}{281}$
32
23328
16970
6358 | 1696 $\frac{52813}{52813}$
5088
1270 | 168 $\frac{8528137..}{8528137..}$
1176
940
u. s. f.

Hiernach ist $\sqrt{72}=8,48528137...$

Wir wollen unser Verfahren zur Berechnung des Werthes von $\sqrt{\pi}$ anwenden, wobei π die Zahl 3,1415926535897932..., d. i. das Verhältniss des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange bedeutet. Dasselbe stellt sich alsdann in folgendem Schema dar:

$\sqrt{3,1415926535897932\ldots} = 1$

```
 1
 ──
 21 | 2 7/7
 14
 ──
  74
  49
 ────
   251 | 34 7/7
   238
   ────
    135
     49
    ────
    869 | 354 24538509055.../24538509055...
    708
    ────
```

1612	1405	1895	3349	2139	732
4	36	81	129	166	u. s. f.
1608	1369	1814	3220	1973	
1416	1062	1770	3186	1770	
1926	3073	448	347	2033	
16	52	114	134	190	
1910	3021	334	213	1843	
1770	2832	0	0	1770	
140	189	334	213	73	

Hiernach ist $\sqrt{\pi} = 1,7724538509055\ldots$

Die Methode zur Berechnung der Quadratwurzeln aus Polynomen, deren Glieder nach Potenzen einer Hauptzahl fortschreiten, und aus dekadischen Zahlen hat sich durch einfache Betrachtungen des Baues der zweiten Potenzen der Polynome entwickelt. Es lässt sich ohne Mühe im Vorhinein übersehen, wenn man die Entwickelungen der dritten, vierten und höheren Potenzen solcher Polynome betrachtet, dass man im Verlaufe der, Behufs der Bestimmung von Correctionen anzuwendenden Operationen der zweiten, der dritten oder der höheren Potenzen schon gefundener Theile der Wurzeln, so wie sie allmählig hervortreten, benöthigen werde. Es wäre das Verfahren ein sehr unvollkommenes, dergleichen Potenzirungen auf dem Wege der wirklichen Multiplication vorzunehmen, und diess um so mehr, als man zu gedachtem Zwecke nur einer gewissen Menge von den Anfangsziffern der Potenzen bedarf. Auf die Formeln (18) bis (23) §. I. lässt sich indessen ein sehr einfacher Rechnungsmechanismus gründen, um die anfänglichen Ziffern, mit denen die Potenzen gegebener dekadischer Zahlen geschrieben werden, zu finden.

Wir wollen die Zahl, welche zu einer Potenz zu erheben ist, im Allgemeinen durch das Polynom

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

vorstellen. Die Coëfficienten dieses Polynoms, d. i. die Zahlen $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ wollen wir als zwei producirende Reihen annehmen, um aus ihnen successive producirte Summen zu bilden. Wenn wir nun den Stoff zur Bildung dieser verschiedenen Summen in Klammern einschliessen, und nachstehende Abkürzungen festsetzen:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_0=\binom{A_0}{A_0} & a_1=\binom{A_0\,A_1}{A_0\,A_1} & a_2=\binom{A_0\,A_1\,A_2}{A_0\,A_1\,A_2} & a_3=\binom{A_0\,A_1\,A_2\,A_3}{A_0\,A_1\,A_2\,A_3} & \\
b_0=\binom{A_1}{A_1} & b_1=\binom{A_1\,A_2}{A_1\,A_2} & b_2=\binom{A_1\,A_2\,A_3}{A_1\,A_2\,A_3} & b_3=\binom{A_1\,A_2\,A_3\,A_4}{A_1\,A_2\,A_3\,A_4} & \text{u. s. f.} \\
c_0=\binom{A_2}{A_2} & c_1=\binom{A_2\,A_3}{A_2\,A_3} & c_2=\binom{A_2\,A_3\,A_4}{A_2\,A_3\,A_4} & c_3=\binom{A_2\,A_3\,A_4\,A_5}{A_2\,A_3\,A_4\,A_5} & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

so wird man mittelst dieser Summen die Glieder der Polynome bestimmen können, welche aus der Entwicklung der zweiten Potenzen jener Polynome hervorgehen, und welche aus dem vorgelegten dadurch entspringen, dass man sich bloss auf die zwei, drei vier, ... überhaupt auf eine bestimmte Anzahl von Anfangsgliedern desselben beschränkt. Zur bequemen Berechnung dieser Glieder kann man sich die producirten Summen nach folgendem Schema anordnen:

A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	(α)
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	(β)
		c_0	c_1	c_2	c_3	(γ)
			d_0	d_1	d_2	(δ)
				e_0	e_1	(ε)

Wenn man sich nun bei der Annahme der Grundform, die zur zweiten Potenz erhoben werden soll, auf eine bestimmte Anzahl von Anfangsgliedern, namentlich auf die zwei, drei, vier, ... ersten Glieder dieses Polynoms beschränkt; so wird man erhalten:

$$(A_0+A_1 z)^2=[a_0+a_1 z]+b_0 z^2;$$
$$(A_0+A_1 z+A_2 z^2)^2=[a_0+a_1 z+a_2 z^2]+b_1 z^3+c_0 z^4;$$
$$(A_0+A_1 z+A_2 z^2+A_3 z^3)^2=[a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3]+b_2 z^4+c_1 z^5+d_0 z^6;$$
u. s. f.

Aus diesen Formeln wird sich nun ohne Mühe der Rechnungsmechanismus für die Entwicklung der zweiten Potenzen der dekadischen Zahlen organisiren lassen. Zur vollständigen Berechnung der zweiten Potenzen gegebener Zahlen bedarf man der Kenntniss aller, im Schema mit (α), (β), (γ), (δ), (ε), ... bezeichneter Reihen. Will man hingegen bloss eine bestimmte Menge der, die höchsten Stellen besetzenden Ziffern der zweiten Potenz haben, wie diess zur Bestimmung von Correctionen in der Folge nöthig sein wird, so ist hierzu die Kenntniss der Zahlen der einzigen Reihe (α) allein hinreichend.

I. Beispiel. Es sei 7231682568 eine vorgelegte Zahl. Man soll die zweiten Potenzen der Zahlen

72; 723; 7231; 72316; 723168; 7231682; etc.

nach und nach bestimmen.

Man bilde aus den Ziffern dieser Zahl zwei producirende Reihen, und suche aus ihnen successive die producirten Summen, die man in folgende Tabelle bringe:

7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	. .	
7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	. .	
49	28	46	26	97	142	97	138	168	266	. .	(α)
	4	12	13	30	49	56	84	154	166	. .	(β)
		9	6	37	60	64	130	134	152	. .	(γ)
			1	12	52	100	98	104	172	. .	(δ)
				36	96	88	92	156	212	. .	(ε)
					64	32	84	116	177	. .	(ζ)
						4	20	49	92	. .	(η)
							25	60	116	. .	(ϑ)

Zur Bildung der Reihen (α), (β), (γ), ... verwendet man nämlich die Ziffern der vorgelegten Zahl in folgender Weise:

$$\text{für } (\alpha) \text{ die Ziffern } \begin{pmatrix} 7\,2\,3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \\ 7\,2\,3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \end{pmatrix}$$

$$\text{,,}\ (\beta)\ \text{,,}\quad \text{,,}\quad \begin{pmatrix} 2\,3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \\ 2\,3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \end{pmatrix}$$

$$\text{,,}\ (\gamma)\ \text{,,}\quad \text{,,}\quad \begin{pmatrix} 3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \\ 3\,1\,6\,8\,2\,5\,6\,8 \end{pmatrix}$$

u. s. f.

von denen man allmählig eine, zwei, drei, ... Anfangsziffern wählt, um aus ihnen, nach dem Gesetze der producirten Summen, das erste, zweite, dritte, ... Glied jeder dieser Reihen (α), (β), (γ), ... zu bilden, als:

$$7.7=49;\quad 7.2+2.7=28;\quad 7.3+2.2+3.7=46;\ \text{u. s. f.}$$
$$2.2=\ 4;\quad 2.3+3.2=12;\quad 2.1+3.3+1.3=13;\ \text{u. s. f.}$$
$$3.3=\ 9;\quad 3.1+1.3=\ 6;\quad 3.6+1.1+6.3=37;\ \text{u. s. f.}$$

u. s. f.

Aus den Gliedern dieser Reihen (α), (β), ... wird man nun die zweiten Potenzen der Zahlen 72, 723, 7231, u. s. f. durch nachstehende Rechnungen bestimmen:

49	49	49	49	u. s. w.
28	28	28	28	
4*	46	46	46	
5184	129*	26	26	
=	522729	1361*	97	
$(72)^2$	=	52287361	33856*	
	$(723)^2$	=	5229603856	
		$(7231)^2$	=	
			$(72316)^2$	

Die mit einem Sternchen bezeichneten Zahlen des vorstehenden Schema werden bloss aus den Reihen (β), (γ), ... gebildet, und zwar in folgender Weise:

12.	13..	30...	u. s. f.
9	6.	37..	
129	1	12.	
	1361	36	
		33856	

Wollte man sich bloss darauf beschränken, die anfänglichen Ziffern der zweiten Potenzen der Zahlen 72, 723, 7231, ... zu finden, so gestattet die Rechnung eine wesentliche Verkürzung. Dieselbe lässt sich nämlich alsdann auf folgende Art führen:

49		
28		
518	$(72)^2 =$	5..
46		
5226	$(723)^2 =$	52..
26		
52286	$(7231)^2 =$	522..
97		
522957	$(72316)^2 =$	5229....
142		
5229712	$(723168)^2 =$	52297...
97		
52297217	$(7231682)^2 =$	522972......
138		
522972308	$(72316825)^2 =$	5229723.....
168		
5229723248	$(723168286)^2 =$	52297232....
266		
52297232746	$(7231682568)^2 =$	522972327....
250		
522972327710	$(72316825686)^2 =$	5229723277...
u. s. f.	u. s. f.	

Der Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der Ziffern, womit die anfänglichen Stellen der zweiten Potenzen der dekadischen Zahlen geschrieben werden, lässt sich endlich noch enger auf folgende Art zusammenziehen:

49	286	217	746
28	97	138	u. s. f.
$\underline{5}18$	$\underline{9}57$	$\underline{3}08$	
46	142	168	
$\underline{2}26$	$\underline{7}12$	$\underline{2}48$	
26	97	266	
$\underline{2}86$	$\underline{2}17$	$\underline{7}46$	

worin die unterstrichenen Zahlen schon die gesuchten sind.

II. Beispiel. Man sucht die Anfangsziffern der zweiten Potenzen der aus den Ziffern

9133965076622

entspringenden Zahlen, wenn man von ihnen die zwei, drei, vier, ... Anfangsziffern beibehält.

Man suche zuerst aus den Ziffern dieser Zahl, dieselben als Glieder zweier producirenden Reihen betrachtend, die producirten Summen auf die Art, wie das folgende Schema zeigt:

9	1	3	3	9	6	5	0	7	6	6	2	2
9	1	3	3	9	6	5	0	7	6	6	2	2
81	18	55	60	177	144	165	100	273	260	288	186	263

Aus diesen producirten Summen erhalten wir nun allmählig:

81	277	773	923
18	144	260	u. s. f.
828	914	990	
55	165	288	
335	305	80188	
60	100	186	
410	150	2066	
177	273	263	
277	773	0923	

Hieraus findet man nun:

$$(91)^2 = 8\,..$$
$$(913)^2 = 83\,..$$
$$(9133)^2 = 834\,..$$
$$(91339)^2 = 8342\,..$$
$$(913396)^2 = 83429\,..$$
$$(9133965)^2 = 834293\,..$$

Es erübriget noch, für die spätern Rechnungen, ähnliche Rechnungsmechanismen anzugeben, durch welche sich die anfänglichen Ziffern der dritten, vierten, fünften und höhern Potenzen erhalten lassen. Zu diesem Zwecke, und um eine bequemere Ausdrucksweise zu gebrauchen, nenne ich die aus den ursprünglich gegebenen Gliedern bestehende producirende Reihe

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad \ldots .$$

eine Reihe der I. Ordnung; ferner die Reihe

$$0 \; ; \; \overline{a}_0 \; ; \; \overline{a}_1 \; ; \; \overline{a}_2 \; ; \; \overline{a}_3 \; ; \; \ldots \ldots ,$$

deren Glieder die einzifferigen Zahlen bedeuten, wie sie aus dem kurz vorher angezeigten Rechnungsmechanismus als Anfangsziffern der zweiten Potenzen der in Rede stehenden Zahlen erhalten werden, und welche wir die effectiven Ziffern nennen wollen, eine Reihe der II. Ordnung.

Bildet man ebenso aus den Gliedern der Zifferreihen der I. und II. Ordnung, sie als neue producirende Reihen betrachtend, die producirten Summen, und leitet aus ihnen die effectiven Ziffern nach einem ähnlichen Rechnungsmechanismus ab, so liefern dieselben die Anfangsziffern für die dritten Potenzen der in Rede stehenden Zahlen. Wir werden sie durch die Zeichen $\overline{\overline{a}}_0$; $\overline{\overline{a}}_1$; $\overline{\overline{a}}_2$; $\overline{\overline{a}}_3$; ... vorstellig machen, und die Reihe

$$0 \; ; \; 0 \; ; \; \overline{\overline{a}}_0 \; ; \; \overline{\overline{a}}_1 \; ; \; \overline{\overline{a}}_2 \; ; \; \overline{\overline{a}}_3 \; ; \; \ldots$$

eine Reihe der III. Ordnung nennen.

Zur Bildung der vierten Potenzen der in Rede stehenden Zahlen tritt wieder ein ähnlicher Rechnungsmechanismus in Anwendung; nur bleibt hier die Wahl unter den producirenden Reihen, die man zu dem gedachten Zwecke verwenden will, völlig frei, indem es gleichgiltig ist, ob man die Reihe der I. Ordnung mit der Reihe der III. Ordnung, oder die Reihe der II. Ordnung mit sich selber verknüpfen will. In dem einen wie im andern Falle erhält man eine Reihe producirter Summen, aus denen man neuerdings die effectiven Ziffern $\overline{\overline{\overline{a}}}_0$; $\overline{\overline{\overline{a}}}_1$; $\overline{\overline{\overline{a}}}_2$; $\overline{\overline{\overline{a}}}_3$; ... erhalten wird. Die Reihe

$$0\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ \overline{\overline{\overline{a}}}_0\ ;\ \overline{\overline{\overline{a}}}_1\ ;\ \overline{\overline{\overline{a}}}_2\ ;\ \dots$$

werde ich, den frühern analog, die Reihe der IV. Ordnung nennen. Diese Ziffern sind alsdann eben diejenigen, mit denen die vierten Potenzen der in Rede stehenden Zahlen in ihren anfänglichen Stellen besetzt sind.

Zur Bildung der Reihe der V. Ordnung kann man wieder entweder die der I. und IV., oder die der II. und III. Ordnung verbinden. Man suche aus der einen oder der andern dieser Verbindungen die producirten Summen, und aus denselben auf frühere Weise die effectiven Ziffern. Diese sind alsdann die Anfangsziffern der fünften Potenzen der in Rede stehenden Zahlen.

Es ist leicht begreiflich, wie sich derselbe Rechnungsmechanismus auch auf die höheren Potenzen erstrecken lasse. Um ihn durch die Anwendung auf einen bestimmten Fall zu erläutern, sei wieder

7231682568 .... I.

eine ursprünglich gegebene Zahl. Man bilde hieraus, wie vorher, die Reihe

0522972327 .... II.

Diese beiden Zifferreihen nehme man als zwei producirende Reihen an, und bilde aus denselben die producirten Summen, indem man von beiden immer gleichviel Anfangsziffern verwendet; so dass man habe

7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	I.
0	5	2	2	9	7	2	3	2	7	II.
0	35	24	33	78	105	109	93	132	222	

Aus den Gliedern dieser letzten Reihe entwickeln sich nun sofort die Anfangsziffern der dritten Potenz der Zahl I. Man hat nämlich

```
 35          185
  24          109
 ───         ───
 374          959
   33           93
 ───         ───
 773          683
    78          132
 ───         ───
 808          962
   105          222
 ───         ───
  185          842  u. s. f.
```

und hieraus

$(72)^3 = 3\,..$

$(723)^3 = 37\,..$ $\quad (723168256)^3 = 37819698\,...$

$(7231)^3 = 378\,..$

u. s. f.

Zur Reihe der dritten Ordnung haben wir nunmehr

0037819698 . . III.

Diese verbinde man wieder mit der ursprünglichen Zifferreihe I, und bilde aus ihnen die Reihe der producirten Summen, wie folgt:

7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	. . . I.
0	0	3	7	8	1	9	6	9	8	. . . III.
0	0	21	55	79	47	114	137	213	200	

Aus den Gliedern dieser letzten Reihe entwickeln sich weiter die Anfangsziffern der vierten Potenz der Zahl I. Man hat nämlich:

21	337 u. s. f.
55	114
265	484
79	137
729	977
47	213
337	983
	200
	500030

folglich $(7231682568)^4 = 2735000\ldots$

Wollte man die Glieder der producirten Summen, woraus sich die effectiven Ziffern bilden, aus zwei Reihen von der II. Ordnung herleiten, so würde man zu demselben Resultate gelangen. In der That hätte man

0	5	2	2	9	7	2	3	2	7	II.
0	5	2	2	9	7	2	3	2	7	II.
0	0	25	20	24	98	110	84	147	166	

und hieraus endlich

25	338 u. s. f.
20	110
270	490
24	84
724	984
98	147
338	987
	166
	500036

Die Zifferreihe der IV. Ordnung ist also wie vorher dieselbe, nämlich

002735000 . . . IV.

Die Anfangsziffern der f ü n f t e n Potenz kann man durch Verbindung entweder der Reihen der I. und IV., oder der II. und III. Ordnung erhalten, wenn man aus denselben in dem einen, oder dem

andern Falle die Reihe der producirten Summen ableitet, und die Glieder dieser Reihe zur Bildung der effectiven Ziffern verwendet. In der That erhält man durch Verbindung der Reihe I und IV

7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	... I.
0	0	0	2	7	3	5	0	0	0	... IV.
0	0	0	14	53	47	64	38	76	83	..

und aus den Gliedern dieser Reihe

14	971	778	u. s. f.
53	64	76	
193	774	856	
41	38	83	
971	778	643	

Wollte man die Reihen II und III verbinden, so fände man in ähnlicher Weise:

0	5	2	2	9	7	2	3	2	7	.. II.
0	0	3	7	8	1	9	6	9	8	.. III.
0	0	0	15	41	60	62	147	177	160	..

und hieraus:

15	970	767	u. s. f.
41	62	177	
191	762	847	
60	147	160	
970	767	630	

so dass also:

$$(7231682568)^5 = 197786\ldots$$

und die effective Zifferreihe der fünften Ordnung sein wird:

0000197786 .. V.

B. Entwicklung eines Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der Cubikwurzeln aus Polynomen und dekadischen Zahlen.

Wenn man annimmt, dass

$$(1) \ldots\ldots\ldots (A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots)^3 = Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots$$

so hängen die Coëfficienten Z_0, Z_1, Z_2, ... von den Coëfficienten A_0, A_1, A_2, ... nach Gesetzen ab, welche §. I. entwickelt worden sind. Diese Gesetze können umgekehrt wieder dazu dienen, um von den Werthen der Coëfficienten Z_0, Z_1, Z_2, ... auf die Werthe der Coëfficienten A_0, A_1, A_2, ... zurückzuschliessen, so, dass man die Gleichung habe:

$$(2) \ldots\ldots\ldots \sqrt[3]{(Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots)} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots$$

Aus diesen Gesetzen lässt sich mittelst sehr einfacher Betrachtungen ein ähnliches Verfahren zur Berechnung der Cubikwurzeln aus gegebenen Polynomen und aus dekadischen Zahlen herleiten, wie wir es im Vorhergehenden für die Quadratwurzeln gefunden haben.

Eine nähere Betrachtung des Gesetzes, nach welchem die Coëfficienten Z_0, Z_1, Z_2, ... von den Coëfficienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ bei der Gl. (1) abhängen, zeigt, dass sich jene aus Theilen zusammensetzen, deren jeder als ein Product zweier Factoren sich darstellt. Von diesen Factoren ist der eine nur von A_0 abhängig, der andere aber dependirt bloss von $A_1 A_2 A_3 \ldots$, und stellt sich immer als eine producirte Summe zweier producirenden Reihen dar, deren Glieder von den gedachten Coëfficienten nach bestimmten Gesetzen abhängen. Diese Gesetze sprechen sich in folgenden Gleichungen aus:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} Z_0 = A_0^3; \\ Z_1 = 3\,A_0^2 \,.\, A_1; \\ Z_2 = 3\,A_0^2 \,.\, A_2 + 3\,A_0 \,.\, K_1'; \\ Z_3 = 3\,A_0^2 \,.\, A_3 + 3\,A_0 \,.\, K_2' + 1 \,.\, K_2''; \\ Z_4 = 3\,A_0^2 \,.\, A_4 + 3\,A_0 \,.\, K_3' + 1 \,.\, K_3''; \\ Z_5 = 3\,A_0^2 \,.\, A_5 + 3\,A_0 \,.\, K_4' + 1 \,.\, K_4''; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken bedeuten $K_1', K_2', K_3', \ldots$ die producirten Summen aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5 \ldots \\ A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5 \ldots \end{pmatrix}$$

und $K_2'', K_3'', K_4'', \ldots$ die producirten Summen aus den Reihen:

$$\begin{pmatrix} A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5 \ldots \\ 0\;\; B_1\, B_2\, B_3\, B_4 \ldots \end{pmatrix}$$

worin die Art der Abhängigkeit der mit $B_1 B_2 B_3 \ldots$ bezeichneten Glieder von $A_1 A_2 A_3 \ldots$ durch die Gleichung

$$(A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + \ldots)^2 = B_1 + B_2 z + B_3 z^2 + \ldots,$$

gegeben ist, d. h. $B_1, B_2, B_3, \ldots$ gehen successive als producirte Summen aus $\binom{A_1}{A_1}$, $\binom{A_1 A_2}{A_1 A_2}$, $\binom{A_1 A_2 A_3}{A_1 A_2 A_3}$, u. s. f. hervor.

Hieraus lässt sich nun leicht der Rechnungsmechanismus organisiren, mittelst dessen aus einem, nach der Grundform der Algebra gebauten Polynom $Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + \ldots$ die Cubikwurzel gefunden werden kann.

Der erste Theil der Wurzel bestimmt sich nach der Formel $A_0 = \sqrt[3]{Z}$. Von diesem aus lassen sich sofort alle folgenden Glieder der Wurzel aus den respectiven Gliedern des gegebenen Polynoms entwickeln, so zwar, dass sich wieder, wie bei der Ausziehung der Quadratwurzeln, $A_1 z$ bloss aus $Z_1 z$; ferner $A_2 z$ nur aus $Z_2 z$, u. s. f. ableiten lässt. Die Regeln, welche man bei diesen Entwicklungen anzuwenden hat, sind nicht wesentlich von denen verschieden, welche für die Ausziehung der Quadratwurzeln angegeben worden sind.

Die dritte Potenz des gefundenen ersten Theils A_0 der Wurzel wird von dem gegebenen Polynome abgezogen, und das dreifache Quadrat desselben (die Zahl $3\,A_0^2$) zum assignirten Divisor angenommen. Aus den einzelnen Gliedern des gegebenen Polynoms findet man successive die einzelnen Glieder der Wurzel auf eine gleichförmige Weise mittelst blosser Divisionen.

Man nehme also das Glied der ersten Ordnung

$$3\,A_0^2 \,.\, A_1 z,$$

und dividire dasselbe durch den Divisor $3\,A_0^2$; so gibt der Quotient $A_1 z$ das Glied der Wurzel von eben dieser Ordnung.

Man nehme hierauf das Glied der zweiten Ordnung. Dasselbe besteht aus zwei Theilen; es ist nämlich

$$3A_0^2 \,.\, A_2 z^2 + 3A_0 \,.\, K_1' z^2,$$

worin $3A_0 \,.\, K_1' z^2$ das Product aus dem Multiplicator $3A_0$ in den Ausdruck $K_1' z^2$ ist, welcher als producirte Summe aus den Gliedern

$$\begin{pmatrix} A_1 z \\ A_1 z \end{pmatrix}$$

hervorgeht. Dieser mit $3A_0^2 \,.\, A_2 z^2$ verbundene Theil $3A_0 \,.\, K_1' z^2$ ist daher aus lauter schon bekannt gewordenen Zahlen berechenbar. Zieht man ihn daher von dem Gliede der zweiten Ordnung, d. i. von $Z_2 z^2$ ab, so bleibt zum Reste oder ersten partiellen Dividend das Product $3A_0^2 \,.\, A_2 z^2$ übrig, das durch $3A_0^2$ dividirt, sogleich das Glied der zweiten Ordnung der gesuchten Wurzel, d. i. $A_2 z^2$ darbietet.

Das Glied der dritten Ordnung des gegebenen Polynoms ist

$$3A_0^2 \,.\, A_3 z^3 + 3A_0 \,.\, K_2' z^3 + 1 \,.\, K_2'' \,.\, z^3.$$

Um aus ihm das Glied derselben Ordnung in der Wurzel abzuleiten, darf man nur beachten, dass mit demselben noch zwei Theile verbunden sind, deren jeder aus schon bekannt gewordenen Gliedern der Wurzel zusammengesetzt ist; namentlich ist $K_2' z^3$ die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z \;;\; A_2 z^2 \\ A_1 z \;;\; A_2 z^2 \end{pmatrix}$$

und $K_2'' z^3$ ist die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z \;;\; A_2 z^2 \\ 0 \;\;\;\;;\; B_1 z^2 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen $3A_0$ und 1 sind beziehungsweise die Multiplicatoren dieser zwei producirten Summen. Wenn man diese aus zwei Theilen bestehende Correction am Gliede der dritten Ordnung, d. i. an $Z_3 z^3$ anbringt, so wird man den Ausdruck $3A_0^2 \,.\, A_3 z^3$ erhalten, der sodann durch den assignirten Divisor $3A_0^2$ dividirt, das Glied der dritten Ordnung von der Wurzel, nämlich $A_3 z^3$ geben wird.

Das Glied der vierten Ordnung des gegebenen Polynoms ist

$$3A_0^2 \,.\, A_4 z^4 + 3A_0 \,.\, K_3' z^4 + 1 \,.\, K_3'' \,.\, z^4.$$

Um aus ihm das Glied derselben Ordnung in der Wurzel abzuleiten, darf man nur wieder überlegen, dass mit demselben noch zwei Theile verknüpft sind, deren jeder aus schon bekannt gewordenen Gliedern der Wurzel besteht; namentlich ist $K_3' z^4$ die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z \;;\; A_2 z^2 \;;\; A_3 z^3 \\ A_1 z \;;\; A_2 z^2 \;;\; A_3 z^3 \end{pmatrix}$$

und $K_3'' z^4$ ist die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z \;;\; A_2 z^2 \;;\; A_3 z^3 \\ 0 \;\;\;\;;\; B_1 z^2 \;;\; B_2 z^3 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen $3A_0$ und 1 sind wieder die unveränderlichen Multiplicatoren dieser beiden producirten Summen. Wenn man diese aus zwei Theilen bestehende Correction am Gliede der vierten Ordnung von dem gegebenen Polynom, d. i. an $Z_4 z^4$ anbringt; so wird man das Product $3A_0^2 \,.\, A_4 z^4$ erhalten, das sodann durch den assignirten Divisor $3A_0^2$ dividirt, das Glied der vierten Ordnung von der Wurzel, nämlich $A_4 z^4$ geben wird.

In ganz ähnlicher Weise findet man aus $Z_5 . z^5$ das entsprechende Glied $A_5 z^5$; aus $Z_6 z^6$ eben so $A_6 z^6$, u. s. f.

Im Wesentlichen besteht das so eben beschriebene Verfahren der Ausziehung der Cubikwurzel aus einem gegebenen Polynome, dessen Glieder nach Potenzen einer Hauptzahl fortschreiten, wie man sieht, in der Aussonderung aller Theile der Wurzel aus den entsprechenden Theilen des gegebenen Polynoms mittelst der Division derselben durch einen sich gleichbleibenden Divisor $3A_0^2$, nachdem man vorher an dem betreffenden Gliede eine, aus bereits bekannt gewordenen Gliedern der Wurzeln berechenbare Correction angebracht hat. Dieselbe setzt sich aus zwei Haupttheilen zusammen, von denen der eine erhalten wird, indem die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3\,; & \ldots \\ A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3\,; & \ldots \end{pmatrix},$$

deren Glieder bis zum letztgefundenen der Wurzel fortzusetzen sind, mit $3A_0$, multiplicirt, und der andere die producirte Summe aus den Reihen

$$\begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3\,; & \ldots \\ O\,; & B_1 z^2\,; & B_2 z^3\,; & \ldots \end{pmatrix}$$

ist. Der hierbei anzuwendende Rechnungsmechanismus liesse sich in folgendem Schema zur Darstellung bringen:

$$\sqrt[3]{[Z_0 + Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \ldots .]} = A_0 +$$

$$\begin{array}{lll}
 & \underline{A_0^3} & \\
 & Z_1 z\,(= 3A_0^2 . A_1 z) \quad : \quad 3A_0^2 & \begin{array}{r|l} + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots & \text{Multiplicatoren} \\ \hline + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots & 3A_0 \\ 0 + B_1 z^2 + B_2 z^3 + \ldots & 1 \end{array} \\
 & \underline{3A_0^2 . A_1 z} & \\
 & Z_2 z^2 (= 3A_0^2 . A_2 z^2 + K_1 z^2) + \ldots & \\
\text{I. Correction} & \underline{K_1 z^2 (= 3A_0 . K_1' z^2)} & \text{wobei } K_1' z^2 = \begin{pmatrix} A_1 z \\ A_1 z \end{pmatrix}; \\
 & 3A_0^2 . A_2 z^2 + \ldots & \\
 & \underline{3A_0^2 . A_2 z^2} & \\
 & Z_3 z^3 (= 3A_0^2 . A_3 z^3 + K_2 z^3) + \ldots & \\
\text{II. Correction} & \underline{K_2 z^3 (= 3A_0 . K_2' z^3 + 1 . K_2'' z^3)} & \text{wobei } K_2' z^3 = \begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2 \\ A_1 z\,; & A_2 z^2 \end{pmatrix}; \quad K_2'' z^3 = \begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2 \\ 0\,; & B_1 z^2 \end{pmatrix}; \\
 & 3A_0^2 . A_3 z^3 + \ldots & \\
 & \underline{3A_0^2 . A_3 z^3} & \\
 & Z_4 z^4 (= 3A_0^2 . A_4 z^4 + K_3 z^4) + \ldots & \\
\text{III. Correction} & \underline{K_3 z^4 (= 3A^0 . K_3' z^4 + 1 . K_3'' z^4)} & \text{wobei } K_3' z^4 = \begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3 \\ A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3 \end{pmatrix}; \quad K_3'' z^4 = \begin{pmatrix} A_1 z\,; & A_2 z^2\,; & A_3 z^3 \\ 0\,; & B_1 z^2\,; & B_2 z^3 \end{pmatrix}; \\
 & 3A_0^2 . A_4 z^4 + \ldots & \\
 & \underline{3A_0^2 . A_4 z^4} & \\
 & Z_5 z^5 = \text{ u. s. f.} &
\end{array}$$

Wir wollen diesen Rechnungsmechanismus auf den Fall anwenden, da man aus der unendlichen Reihe

$$1 + z + \frac{1}{1.2} . z^2 + \frac{1}{1.2.3} . z^3 + \frac{1}{1.2.3.4} . z^4 + \ldots + \frac{1}{k!} . z^k + \ldots$$

die Cubikwurzel ziehen solle.

$$\sqrt[3]{\left(1+z+\frac{1}{1.2}\cdot z^2+\frac{1}{1.2\,3}\cdot z^3+\frac{1}{1.2.3.4}\cdot z^4+\ldots\right)}=1\quad\frac{1}{3}\cdot z+\frac{1}{18}\cdot z^2+\frac{1}{162}\cdot z^3+\frac{1}{5832}\cdot z^4+\ldots\ \Big|\ \text{Multiplicatoren}$$

$$\begin{array}{l|l}
\begin{array}{l}
\dfrac{1}{} \\ \hline
z:3 \quad \dfrac{1}{3}\,z\ ;\ \dfrac{1}{18}\,z^2\ ;\ \dfrac{1}{162}\,z^3\ ;\ \dfrac{1}{5832}\cdot z^4\ ;\ \ldots \\[2ex]
\dfrac{z}{} \\ \hline
\dfrac{1}{2}\,z^2 \quad 0\ ;\ \dfrac{1}{9}\,z^2\ ;\ \dfrac{1}{27}\,z^3\ ;\ \dfrac{7}{972}\cdot z^4\ ;\ \ldots
\end{array} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\text{I. Corr.}\ \begin{array}{l} \frac{1}{3}z^2 \\ \hline \frac{1}{6}z^2 \\ \frac{1}{6}z^2 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{l} \frac{1}{6}z^3 \\ \text{II. C.}\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{9}z^3 \\ +\frac{1}{27}z^3 \end{array}\right. \\ \hline \frac{1}{54}z^3 \\ \frac{1}{54}z^3 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{l} \frac{1}{24}z^4 \\ \text{III. C.}\left\{\begin{array}{l} +\frac{7}{324}z^4 \\ +\frac{1}{54}z^4 \end{array}\right. \\ \hline \frac{1}{1944}z^4 \\ \frac{1}{1944}z^4 \\ \hline \end{array} &
\begin{array}{l} \frac{1}{120}z^5 \\ \text{u. s. f.} \end{array}
\end{array}$$

Die gesuchte Cubikwurzel ist also $1+\frac{1}{3}z+\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{162}z^3+\frac{1}{5832}z^4+\ldots$

In der That ist, wegen $e^z=1+z+\frac{1}{1.2}z^2+\frac{1}{1.2.3}z^3+\frac{1}{1.2.3.4}z^4+\ldots;$

$$\text{auch}\ \sqrt[3]{e^z}=e^{\frac{1}{3}z}=1+\frac{1}{3}z+\frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{3}z\right)^2+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{1}{3}z\right)^3+\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{3}z\right)^4+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{3}z+\frac{1}{18}z^2+\frac{1}{162}z^3+\frac{1}{5832}z^4+\ldots$$

Lässt man Z_1, Z_2, Z_3, . . . positive einzifferige Zahlen, z den Bruch $\frac{1}{10}$, und Z_0 eine dekadische ganze Zahl bedeuten, so stellt das Polynom $Z_0+Z_1z+Z_2z^2+\ldots$ eine dekadische Zahl mit einem angehängten Decimalbruch vor. Damit die Cubikwurzel aus dieser Zahl wieder in Form einer solchen Zahl erhalten werde, bedarf der eben beschriebene Rechnungsmechanismus für die Ausziehung der Cubikwurzel aus systematischen Polynomen nur einiger Modificationen, um A_1, A_2, A_3 . . als positive einzifferige Zahlen zu erhalten.

Man suche also zuerst ein Paar Grenzen der Wurzel, die sich in der höchsten Stelle oder in den zwei, drei, . . ersten Ziffern von einander nicht unterscheiden, und nehme diese übereinstimmenden Ziffern für den ersten Theil der Cubikwurzel an, d. h. man suche mittelst einer partiellen Cubikwurzelausziehung aus einem höchsten Theil der gegebenen Zahl den höchsten Theil der Wurzel, wodurch man eine oder zwei genaue Ziffern der gesuchten Wurzel findet. Dieser Theil ist hier das, was beim allgemeinen Polynome das Glied A_0 ist. Man ziehe die dritte Potenz desselben vom höchsten Theile der Zahl ab, setze die nächstfolgende Stelle aus der gegebenen Zahl herab, und nehme das dreifache Quadrat des gefundenen Theiles A_0 zum assignirten Divisor an. Neben demselben ziehe man einen horizontalen Strich, um die nun zu bestimmenden Ziffern der Wurzel über, und die zur Berechnung der Correctionen nothwendig werdenden zwei producirenden Reihen unter denselben zu schreiben. Die erste dieser Reihen besteht genau aus denselben Ziffern, als die über dem Striche stehende, daher man ihre Ziffern gleichzeitig mit denen der Cubikwurzel gewinnt. Die Ziffern der zweiten Reihe, welche 0 in der ersten Stelle stehen hat, ergeben sich aus den Anfangsziffern der Zahlen, die man aus den bereits gefundenen Ziffern der Cubikwurzel über dem Striche nach und nach erhält. Bei der allmäh-

ligen Bildung der zweiten Potenzen, somit zur allmähligen Bildung der Ziffern, aus denen die zweite producirende Reihe zu bestehen hat, wird man das im Vorhergehenden bereits auseinandergesetzte Verfahren zur Bildung der Reihen der II. Ordnung in Anwendung bringen. Die Multiplicatoren dieser zwei Reihen sind, für die erste $3A_0$ d. i. das Dreifache des schon gefundenen Theiles der Wurzel; für die zweite die Zahl 1.10 d. i. 10, indem man $(B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots) . z$ für $B_1 z^2 + B_2 z^3 + B_3 z^4 + \ldots$ setzt.

Dividirt man nun den ersten Rest durch den assignirten Divisor, so wird der partielle Quotient die erste auf den bereits gefundenen Theil A_0 folgende Ziffer sein, die man sogleich neben den Divisor über und unter den horizontalen Strich hinschreibt. Das Product aus ihr und dem Divisor wird hierauf vom vorigen Reste abgezogen, und dem Unterschiede die folgende Ziffer aus der gegebenen Zahl angehängt, in deren Ermanglung 0 an deren Stelle tritt. An dieser neuen Zahl wird sofort die Correction angebracht, welche hier noch aus einem einzigen Theile besteht. Der weitere Verlauf der Operationen wird aus der Betrachtung der folgenden Beispiele klar werden.

I. Beispiel. Man sucht die Cubikwurzel aus der Zahl 29000, von der wir wissen, dass sie zwischen 30 und 31 liegt. Die untere Grenze 30 werde also für A_0 angenommen. Der erforderliche Rechnungsmechanismus lässt sich alsdann in folgendem Schema darstellen:

7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	Multipl.
7	2	3	1	6	8	2	5	6	8	.... I.
49	28	46	26	97	142	97	138	168	266	(90
0	* 5	2	2	9	7	2	3	2	7	.... II.
0	35	24	33	78	105	109	93	132	222	(10

*) Die Ziffer der vierten (höchsten) Stelle in $(72)^2$.

$\sqrt[3]{29000} = 30$
27000
20000 | 2700 $(=3.30^2)$
18900 = 2700 . 7;
11000
I. Corr. 4410 = 49 . 90;
6590
5400 = 2700 . 2;
11900
II. Corr. 2870 = 28.90 + 35.10;
9030
8100 = 2700 . 3;
9300
III. Corr. 4380 = 46 . 90 + 24 . 10;
4920
2700 = 2700 . 1;
22200
IV. Corr. 2670 = 26 . 90 + 33 . 10;
19530
16200 = 2700 . 6;
33300
V. Corr. . 9510 = 97 . 90 + 78 . 10;
23790
21600 = 2700 . 8;
21900
VI. Corr. . 13830 = 142 . 90 + 105 . 10;
8070
5400 = 2700 . 2;
2670

26700
VII. Corr. 9820 = 97 . 90 + 109 . 10;
16880
13500 = 2700 . 5;
33800
VIII. Corr. 13500 = 138 . 90 + 93 . 10;
20450
16200 = 2700 . 6;
42500
IX. Corr. 16440 = 168.90 + 132.10;
26060
21600 = 2700 . 8;
44600
X. Corr. . 26160 =
18440 etc.

49
28
518
46
226
26
286
97
957
142
712
97
217
138
308
168
248
266
746
u. s. f.

Die unterstrichenen Ziffern bilden die Glieder der Reihe II.

Hiernach ist $\sqrt[3]{29000} = 30,7231682568 \ldots$

II. Beispiel. Man sucht den Werth des Radicals $\sqrt[3]{761332}$, welcher zwischen den Grenzen 90 und 100 liegt.

```
∛761332 = 9
 729
 ───
 323|243
 243
 ───
 803
  27
 ───
 776
 729
 ───
 472
 162
 ───
 310
 243
 ───
 670 | 1200 | 1550 | 2400 | 2830
 307 |  316 |  581 |  902 | 1375
 ─── | ──── | ──── | ──── | ────
 363 |  884 |  969 | 1498 | 1455
 243 |  729 |  729 | 1215 | 1215
 ─── | ──── | ──── | ──── | ────
 120 |  155 |  240 |  283 |  240 etc.
```

1	3	1	1	3	3	5	5	.. Mult.
1	3	1	1	3	3	5	5	I.
01	6	11	18	13	26	35		(27
0	*0	1	7	1	9	5		II.
0	0	1	10	23	20	43		(10

*) Die Ziffer der vierten Stelle in $(13)^2$.

```
01
 6
───
016
 11
───
171
  8
───
718
 13
───
193
 26
───
956
 35
───
595 u. s. f.
```

Hiernach ist $\sqrt[3]{761332} = 91{,}3113355\ldots$

Im Laufe der Rechnung kann es sich ein- oder auch mehrmal ereignen, dass man die effectiven Ziffern in der Reihe der II. Ordnung dergestalt zu ändern habe, dass vorhergehende Ziffern erhöht und die Stellen der nachfolgenden mit Nullen besetzt werden müssen. Um die Rechnung den neuen effectiven Ziffern der Reihe der II. Ordnung anzupassen, treten in solchen Fällen neue Correctionen ein, die ich, zum Unterschiede der vorigen, **secundäre** nennen werde. Diess wird aus den nachfolgenden Beispielen ersichtlich.

I. Beispiel. Man sucht den Werth des Radicals $\sqrt[3]{1256684}$, der zwischen 107 und 108 liegt.

```
    ∛1256684 = 107
     1225043
     ───────
      316410|34347
      309123
      ──────
       72870
I.     26001 = 81.321
       ─────
       46869
       34347
       ─────
      125220
II.     6498 = 18.321 + 72.10;
      ──────
      118722
      103041
      ──────
       15681
```

9	1	3	3	9	6	5	0	7	6	6	2	2	5	Multipl.
9	1	3	3	9	6	5	0	7	6	6	2	2	—	I.
81	18	55	60	177	144	165	100	273	260	288	186	263	—	(321
0	8	3	4	2	9	3	1	7	9	—	—	—	—	
								8	0	1	—	—	—	II.
										2	0	9	—	
0	72	35	63	55	176	129	139	157	269	—	—	—	—	
								166	189	196	—	—	—	(10
										202	192	252	—	

```
 81
 18
───
828
```

156810

III. 18005 = 55.321 + 35.10;

138805

103041

357640

IV. 19890 = 60.321 + 63.10;

337750

309123

286270

V. 57367 = 177.321 + 55.10;

228903

206082

228210

VI. 47984 = 144.321 + 176.10;

180226

171735

84910

VII. 54255 = 165.321 + 129.10;

306550

VIII. 33490 = 100.321 + 139.10;

273060

240429

326310

IX. 89203 = 273.321 + 157.10;

237107

206082

310250

X. 86150 = 260.321 + 269.10;

224100

206082

18018

sec. Corr. 100 (*)

(*) 157 | 166
269 | 189
1839 − 1849 = −10
(−10).10 = −100

179180

XI. 94408 = 288.321 + 196.10;

84772

68694

16078

sec. Corr. 60 (**)

(**) 196 − 202 = −6
(−6).10 = −60

160180

61626 = 186.321 + 192.10;

99554

68694

308600

86943 = 263.321 + 252.10;

221657

Hiernach ist $\sqrt[3]{1256684} = 107,91339650766225\ldots$

828
55
335
60
410
177
277
144
914
165
305
100
150
273
773
260
990
288
80188
186
2066
263
923
u. s. f.

II. Beispiel. Man sucht den Werth von $\sqrt[3]{95166,5}$ bis auf sechzehn Decimalstellen.

6	5	5	6	6	7	7	5	3	2	4	1	7	2	..	Multipl.
6	5	5	6	6	7	7	5	3	2	4	1	7	2	..	I.
36	60	85	122	157	204	250	272	276	272	291	266	313	.	..	(135
0	4	2	9	8	9	9	—	—	—	—	—	—	—	—	
				9	0	0	1	9	—	—	—	—	—	—	
							2	0	2	6	3	—	—	—	II.
											4	0	.	..	
0	24	32	84	127	175	233	—	—	—	—	—	—	—	—	
				133	126	139	156	210	—	—	—	—	—	—	
							162	161	170	180	162	—	—	—	(10
											168	133	.	..	

$\sqrt[3]{95166,5}=45$

91125

40415 | 6075

36450

39650

4860 = 36.135

34790

30375

44150

8340 = 60.135 + 24.10;

35810

30375

54350

11795 = 85.135 + 32.10;

42555

36450

61050

17310 = 122.135 + 84.10;

43740

36450

72900

22465 = 157.135 + 127.10;

50435

42525

79100

29290 = 204.135 + 175.10;

49810

42525

72850

36080 = 250.135 + 233.10;

36770

30374

6395

—160(*)

62350

38280 = 272.135 + 156.10;

24070

18225

58450

39360 = 276.135 + 210.10;

19090

12150

6940

36

60

420

85

285

122

972

157

877

204

974

250

990

272

900172

900172

276

996

272

20232

291

611

266

376

313

4073

u. s. f.

Secundäre Correctionen.

(*) 127 175 233	133 126 139
14683 — 14699 = —16 (—16).10 = —160	

6940
−110 (**)
68300
38420 = 272 . 135 + 170 . 10;
29880
24300
55800
41085 = 291 . 135 + 180 . 10;
14715
6075
86400
37530 = 266 . 135 + 162 . 10;
48870
42525
6345
−60 (***)
62850
43585 = 313 . 135 + 133 . 10;
19265

(**) 156 210	162 161
1770 − 1781 = −11 (−11) . 10 = −110	

(***) 162 − 168 = − 6 (−6) . 10 = − 60

Hiernach ist $\sqrt[3]{95166{,}5} = 45{,}65566775324172\ldots$

C) Entwicklung eines Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der Wurzeln des vierten Grades aus Polynomen und dekadischen Zahlen.

Wenn die Gleichung

$$(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots)^4 = Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots$$

statuirt wird; so hängen die Coëfficienten $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 \ldots$ von $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ nach Gesetzen ab, welche durch nachstehende Formeln ausgedrückt sind:

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 4\,A_0^4 \\
Z_1 &= 4\,A_0^3 . A_1; \\
Z_2 &= 4\,A_0^3 . A_2 + 6A_0^2 . K_1'; \\
Z_3 &= 4\,A_0^3 . A_3 + 6A_0^2 . K_2' + 4A_0 . K_2''; \\
Z_4 &= 4\,A_0^3 . A_4 + 6A_0^2 . K_3' + 4A_0 . K_3'' + 1 . K_3'''; \\
Z_5 &= 4\,A_0^3 . A_5 + 6A_0^2 . K_4' + 4A_0 . K_4'' + 1 . K_4''';
\end{aligned}$$

u. s. f.

In diesen Formeln bezeichnen die Factoren $K_1', K_2' \ldots$ producirte Summen, als:

$K_1'\ K_2'\ K_3'\ K_4' \ldots$ die producirten Summen aus $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \end{pmatrix}$;

$K_1''\ K_2''\ K_3''\ K_4'' \ldots$ „ „ „ „ $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 & \ldots \end{pmatrix}$;

$K_1'''\ K_2'''\ K_3'''\ K_4''' \ldots$ „ „ „ „ $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 & \ldots \end{pmatrix}$;

u. s. f.

wobei die Gesetze der Abhängigkeit der Zahlen B_1, B_2, B_3, ... C_1, C_2, C_3, ... von den Coëfficienten A_1, A_2, A_3, ... durch die Gleichungen

$$(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots)^2=B_1+B_2z+B_3z^2+\ldots$$
$$(A_1+A_2z+A_3z^2+\ldots)(B_1+B_2z+B_3z^2+\ldots=C_1+C_2z+C_3z^2+\ldots$$

ausgedrückt sind.

Setzt man also $M=4A_0^3$; $M'=6A_0^2$; $M''=4A_0$;

und

$$K_1=M'.K_1';$$
$$K_2=M'.K_2'+M''.K_2'';$$
$$K_3=M'.K_3'+M''.K_3''+1.K_3''';$$
$$K_4=M'.K_4'+M''.K_4''+1.K_4''';$$
u. s. f.

so ist

$$Z_1=M.A_1;\quad Z_2=M.A_2+K_1;\quad Z_3=M.A_3+K_2;\quad Z_4=M.A_4+K_3;\quad \text{u. s. f.}$$

Aus diesen Formeln entwickelt sich wieder sehr leicht das Verfahren zur Bestimmung der Coëfficienten A_0, A_1, A_2, A_3, ..., wenn die Coëfficienten Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, ... gegeben sind.

Das erste Glied A_0 bestimmt sich unmittelbar aus dem ersten Gliede Z^0 nach der Formel

$$A_0=\sqrt[3]{Z_0}.$$

Die folgenden Glieder werden sämmtlich mittelst blosser Divisionen aus den respectiven Gliedern des gegebenen Polynoms, also A_1z aus Z_1z; A_2z aus Z_2z; u. s. f. gefunden.

Die Vorschriften, nach denen diese Rechnungen zu geschehen haben, sind im Wesentlichen nicht von denen unterschieden, durch welche die Theile der Quadrat- und Cubikwurzeln erhalten werden. Jedes Glied gibt, nach vorher an ihm angebrachter Correction durch den assignirten Divisor $4A_0^3$ dividirt, das entsprechende Glied der Wurzel von ebendemselben Range. Die in Rede stehenden Correctionen aber sind immer aus schon bekannt gewordenen Gliedern der Wurzel berechenbar.

Das Glied der ersten Ordnung, Z_1z, wird unmittelbar durch den assignirten Divisor $4A_0^3$ dividirt, und gibt im partiellen Quotienten das Glied eben dieser Ordnung von der Wurzel.

Das Glied der zweiten Ordnung, Z_2z^2, wird mittelst der ersten Correction K_1z^2, die ein Product aus dem Multiplicator $M_1=6A_0^2$ in die producirte Summe $\binom{A_1z}{A_1z}$ ist, reducirt.

Das Glied der dritten Ordnung, Z_3z^3, wird mittelst der zweiten Correction K_2z^3 reducirt. Dieselbe setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von welchen

der erste ein Product aus dem Multiplicator $M'=6A_0^2$ in die prod. S. $\begin{pmatrix}A_1z; & A_2z^2\\ A_1z; & A_2z^2\end{pmatrix}$; und

der zweite „ „ „ „ „ $M''z=4A_0z$ „ „ „ „ $\begin{pmatrix}A_1z; & A_2z^2\\ 0; & B_1z\end{pmatrix}$, ist.

Das Glied der vierten Ordnung, Z_4z^4, wird mittelst der dritten Correction K_3z^4 reducirt. Dieselbe setzt sich aus drei Theilen zusammen, von welchen

der erste ein Product aus dem Multiplicator $M'=6A_0^2$ in die prod. S. $\begin{pmatrix}A_1z; & A_2z^2; & A_3z^3\\ A_1z; & A_2z^2; & A_3z^3\end{pmatrix}$;

der zweite „ „ „ „ „ $M''z=4A_0z$ „ „ „ „ $\begin{pmatrix}A_1z; & A_2z^2; & A_3z^3\\ 0; & B_1z; & B_2z^2\end{pmatrix}$; und

der dritte „ „ „ „ „ $1.z^2$ „ „ „ „ $\begin{pmatrix}A_1z; & A_2z^2; & A_3z^3\\ 0; & 0; & C_1z\end{pmatrix}$ ist.

Jede der nachfolgenden Correctionen, die an den Gliedern $Z_5 z^5$; $Z_6 z^5$; ... anzubringen sind, besteht, wie die für das Glied $Z_4 z^4$ aus drei Theilen, von denen jeder ein Product aus einem Multiplicator in eine producirte Summe zweier Reihen, zu denen bereits gefundene Theile der Wurzel die resp. Glieder liefern. Der Rechnungsmechanismus, der hieraus für die Ausziehung der Wurzeln des vierten Grades entspringt, lässt sich in folgendem Schema zur Darstellung bringen.

$$\sqrt[4]{(Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots)} = A_0$$

A_0^4

$Z_1 z \quad : \quad M \; (= \cdot A_0^3)$

$M A_1 z$

$Z_2 z^2 + \ldots$

I. Corr. $\quad K_1 z^2 (= M' K_1' z^2)$

$M A_2 z^2 + \ldots$

$M A_2 z^2$

$Z_3 z^3 + \ldots$

II. Corr. $\quad K_2 z^3 (= M' K_2 z^3 + M K_2' z^3)$

$M A_3 z^3 + \ldots$

$M A_3 z^3$

$Z_4 z^4 + \ldots$

III. Corr. $\quad K_3 z^4 (= M K_3' z^4 + M' K_3'' z^4 + 1 . K_3''' z^4)$

$M A_4 z^4 + \ldots$

$M A_4 z^4$

$Z_5 z^5 + \ldots$ u. s. f.

$+ A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots$	Multiplicatoren
$A_1 z$; $A_2 z^2$; $A_3 z^3$; $A_4 z^4$; ...	$M' = 6 A_0^2$
0 ; $B_1 z$; $B_2 z^2$; $B_3 z^3$; ...	$M'' z = 4 A_0 z$
0 ; 0 ; $C_1 z$; $C_2 z^2$; ...	$1 . z^2 = z^2$

Die Anwendung dieser Formeln zur Ausziehung der Wurzeln des vierten Grades aus dekadischen Zahlen ergibt sich, wie bei den vorhergehenden Graden, von selbst. Der hierzu dienliche Rechnungsmechanismus ist aus nachstehendem Beispiele ersichtlich, in welchem der Werth von $\sqrt[4]{\pi}$ bestimmt wird.

$$\sqrt[4]{3{,}14159265358979\ldots} = 1{,}3$$

28561

28549 | 8788

26364

21852

I. Corr. . 9126

12726

8788

39386

II. Corr. . . 6084

33302

26364

69385

III. Corr. . . . 33306

36079

26364

97153

3	1	3	3	5	3	6	3	8	..	Multiplicatoren
3	1	3	3	5	3	6	3	8	..	. . . . . . I.
9	6	19	24	45	46	81	78	133	..	(1014
0	0	9	8	1	8	—	—	—	—	
	*				9	0	4	—		. . . . . II.
							5	0	..	
0	0	27	33	38	76	—	—	—	—	
					79	81	109	—	—	(520
							112	115	..	
0	0	**0	3	0	7	6	8	3	..	. . . . . III.
0	0	0	9	3	30	34	66	65	..	(100

*) Die vierte Stelle in $(31)^2$.

**) Die neunte Stelle in $(313)^2$.

```
                      97153
IV. Corr. . .         42396
                      -----
                      54757
                      43940
                     ------
                     108175
V. Corr. . . .        65690
                     ------
                      42485
                      26364
                     ------
                     161218
VI. Corr. . . .       89164
                     ------
                      72054
                      52728
                     ------
                      19326
                     -1560 (*)
                     ------
                     177669
VII. Corr. . . .     127654
                     ------
                      50015
                      26364
                     ------
                     236517
VIII. Corr. . . .    142372
                     ------
                      94145
                      70304
                     ------
                      23841
                     -1560 (**)
                     ------
IX. Corr. . . . .    222819
                     201162
                     ------
                      21657 u. s. f.
```

```
(*) 76 − 79 — = 3
(−3).520 = −1560
```

```
(**) 109 − 112 = −3
(−3).520 = −1560
```

```
  09
   6
----
 096
  19
----
 979
  24
----
 814
  45
----
 185
  46
----
 896
  81
----
9041
  78
----
 488
 133
----
5013
u. s. f.
```

```
 27
 33
----
303
 38
----
068
 76
----
756
  3 (=79−76)
 81
----
671
109
----
819
  3 (=112−109)
115
----
335
u. s. f.
```

Tabelle zur Berechnung der Correctionen.

I.	Correction	$= 9 \,.\, 1014 +$	$= 9126$;
II.	„	$= 6 \,.\, 1014 + 0 \,.\, 520$	$= 6084$;
III.	„	$= 19 \,.\, 1014 + 27 \,.\, 520 + 0 \,.\, 100$	$= 33306$;
IV.	„	$= 24 \,.\, 1014 + 33 \,.\, 520 + 9 \,.\, 100$	$= 42396$;
V.	„	$= 45 \,.\, 1014 + 38 \,.\, 520 + 3 \,.\, 100$	$= 65690$;
VI.	„	$= 46 \,.\, 1014 + 76 \,.\, 520 + 30 \,.\, 100$	$= 89164$;
VII.	„	$= 81 \,.\, 1014 + 81 \,.\, 520 + 34 \,.\, 100$	$= 127654$;
VIII.	„	$= 78 \,.\, 1014 + 109 \,.\, 520 + 66 \,.\, 100$	$= 142372$;
IX.	„	$= 133 \,.\, 1014 + 115 \,.\, 520 + 65 \,.\, 100$	$= 201162$.

Hiernach ist $\sqrt[4]{\pi} = 1,3313353638\ldots$

D) Allgemeine Darstellung des Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der Wurzeln jedes Grades aus gegebenen Polynomen oder aus dekadischen Zahlen.

Wenn man die allgemeine Gleichung hat:

(1) . . $(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots.)^4 = Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots.$;

so werden die Coëfficienten $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 \ldots$ aus den Coëfficienten $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ nach Gesetzen ab-

hängig sein, welche durch die Formeln (27) 28) §. I ausgedrückt sind, und dazu dienen werden, wenn $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ als gegeben vorausgesetzt werden, die Werthe von $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ zu finden.

Statuirt man die Gl. (7) §. I, bis

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad R^{n-1} = L_1 + L_2 z + L_3 z^2 + L_4 z^3 + \ldots\ldots;$$

verbindet man hierauf die Coëfficienten

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad A_1;\ A_2;\ A_3;\ A_4;\ A_5;\ \ldots\ldots;\ A_{n-2};\ A_{n-1};\ A_n;\ \ldots\ldots$$

mit jeder der Reihen:

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{llllllllll} A_1; & A_2; & A_3; & A_4; & A_5; & \ldots; & A_{n-2}; & A_{n-1}; & A_n & ;\ldots \\ 0; & B_1; & B_2; & B_3; & B_4; & \ldots; & B_{n-3}; & B_{n-2}; & B_{n-1}; & \ldots \\ 0; & 0; & C_1; & C_2; & C_3; & \ldots; & C_{n-4}; & C_{n-3}; & C_{n-2}; & \ldots \\ 0; & 0; & 0; & D_1; & D_2; & \ldots; & D_{n-5}; & D_{n-4}; & D_{n-3}; & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0; & 0; & 0; & 0; & 0; & \ldots; & 0 & ; L_1 & ; L_2 & ;\ldots \end{array}\right.$$

zu producirenden Reihen; bildet aus denselben die producirten Summen

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{llllllllll} K'_1; & K'_2; & K'_3; & K'_4 & ; K'_5 & ;\ldots; & K'_{n-2}; & K'_{n-1} & ; K'_n & ;\ldots \\ 0; & K''_2; & K''_3; & K''_4 & ; K''_5 & ;\ldots; & K''_{n-2}; & K''_{n-1} & ; K''_n & ;\ldots \\ 0; & 0; & K'''_3; & K'''_4 & ; K'''_5 & ;\ldots; & K'''_{n-2}; & K'''_{n-1} & ; K'''_n & ;\ldots \\ 0; & 0; & 0; & K^{IV}_4 & ; K^{IV}_5 & ;\ldots; & K^{IV}_{n-2}; & K^{IV}_{n-1} & ; K^{IV}_n & ;\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0; & 0; & 0; & 0 & ; 0 & ;\ldots; & 0 & ; K^{(n-1)}_{n-1}; & K^{(n-1)}_n; & \ldots \end{array}\right.$$

setzt man ferner

$$(6) \,.\, M' = \binom{n}{2} A_0^{n-2};\ M'' = \binom{n}{3} A_0^{n-3};\ M''' = \binom{n}{4} A_0^{n-4};\ \ldots\ldots;\ M^{(n-2)} = \binom{n}{n-1} A_0;\ M^{(n-1)} = 1$$

und

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} K_1 = M' . K'_1; \\ K_2 = M' . K'_2 + M'' . K''_2; \\ K_3 = M' . K'_3 + M'' . K''_3 + M''' . K'''_3; \\ K_4 = M' . K'_4 + M'' . K''_4 + M''' . K'''_4 + M^{IV} . K^{IV}_4; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

und überhaupt

$$(8) \quad \ldots \quad K_m = M' . K'_m + M'' . K''_m + M''' . K'''_m + \ldots\ldots + M^{(n-1)} K^{(n-1)}_m,$$

wobei erst K_{n-1}; K_n; K_{n+1}; .... vollständig aus n—1 Theilen bestehen,

endlich

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Delta = n A_0^{n-1};$$

so hat man:

$$(10) \,.\, Z_0 = A_0^n;\ Z_1 = A_1 . \Delta;\ Z_2 = A_2 . \Delta + K_1;\ Z_3 = A_3 . \Delta + K_3;\ Z_4 = A_4 . \Delta + K_3;\ \ldots$$

Diese Formeln dienen nun, wenn $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ gegeben sind, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ zu finden.

Nachdem man aus der ersten der Gl. (10)

$$(11) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_0 = \sqrt[n]{Z_0}$$

gefunden hat, bilde man nach (9) den Ausdruck Δ, den man zum assignirten Divisor annimmt. Aus der zweiten der Formeln (10) ergibt sich A_1 mittelst unmittelbarer Division von Z_1 durch $\triangle$. Aus A_1 erhält man sofort K_1', folglich nach der ersten der Gl. (7) die erste Correction K_1. Zieht man diese, in Gemässheit der dritten der Formeln (10), von Z_2 ab; so gibt der Unterschied, durch Δ dividirt, den Werth von A_2. Aus A_1 und A_2 ergibt sich ferner B_1, und hieraus K_2' und K_2'', woraus mittelst der zweiten der Formeln (7) die zweite Correction K_2 gefunden wird. Zieht man diese, in Gemässheit der vierten der Formeln (10), von Z_3 ab; so gibt der Unterschied, durch Δ dividirt, den Werth von A_3. u. s. f.

Bei der numerischen Berechnung der Wurzeln aus dekadischen Zahlen stimmen die Ziffern an den mit den Zeichen

$$K_2''\,;\; K_3'''\,;\; K_4^{IV}\,;\; K_5^{V}\,;\; .\;.\;.\;.\;.\,;\; K_{n-1}^{(n-1)}$$

besetzten Stellen mit jenen überein, welche in den respectiven Zahlen

$$(A_1 A_2)^2\,;\; (A_1 A_2 A_3)^3\,;\; (A_1 A_2 A_3 A_4)^4\,;\; .\;.\;.\;.\;.\,;\; (A_1 A_2 \ldots A_{n-1})^{n-1}$$

die vierte, neunte, sechzehnte, ... ; $(n-1)^2$te

Stelle einnehmen, wobei A_1; A_2; A_3; . . . . die einziffrigen Zahlen bedeuten, mit denen der auf A_0 folgende Theil der dekadischen Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll, geschrieben wird.

§. III.

Entwicklung des Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der reellen Wurzeln der numerischen Gleichungen eines jeden Grades.

Es sei

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \; . \; . \; . \; . \; . + a_{n-1} x = a_n$$

irgend eine Gleichung des n ten Grades, worin $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}, a_n$ beliebige reelle Zahlen bedeuten, welche die Form dekadischer Zahlen haben. Von dieser Gleichung sei es bereits bekannt, dass sie zwischen den reellen Zahlen a, b eine einzige Wurzel liegen habe, von der man unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen kann, dass sie p o s i t i v sei. Von diesen Grenzen a, b werde ferner vorausgesetzt, dass sie in dekadischer Zahlform dargestellt seien, und bereits so nahe an einander gebracht wären, dass die erste Ziffer, oder die zwei oder drei ersten Ziffern von a schon dem wahren Werthe der Wurzel angehören. Alsdann lassen sich, mittelst eines auf gleichförmige Weise fortschreitenden Rechnungsmechanismus, der sich von dem im vorigen Paragraphe erklärten zur Ausziehung der Wurzeln des n ten Grades im Wesentlichen nicht unterscheidet, alle nachfolgenden Ziffern der zwischen a und b liegenden Wurzel der Gleichung (1) successive, und so weit als man will, finden. Stellt man nämlich die gesuchte Wurzel durch die Formel

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \; . \; . \; . \; . \; .$$

dar, und nimmt man A_0 für den gefundenen Theil der Wurzel, wie er aus der untern Grenze a erhalten wird, so sind $A_1, A_2, A_3, \ldots .$ die nachfolgenden Ziffern, welche mittelst des Rechnungsmechanismus bestimmt werden sollen. Das Polynom (2) muss nun so beschaffen sein, dass es, für x in den ersten

Theil der Gleichung (1) substituirt, denselben auf a_n reducire. Diese Substitution gibt für den in Rede stehenden ersten Theil der Gleichung (1) ein Polynom von der Form

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Z_0 + Z_1 . z + Z_2 . z^2 + Z_3 . z^3 + \ldots\ldots,$$

das mit der gegebenen Zahl a_n zusammenfallen muss. Im §. I. sind für diese Entwicklung des Polynoms (3) die allgemeinen Formeln angegeben worden. Dieselben enthalten die Gesetze für die Bestimmung der Coëfficienten $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ aus den Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $A_0, A_1, A_2, \ldots$, mittelst deren umgekehrt aus den Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ die Coëfficienten $A_1, A_2, \ldots$, indem A_0 als schon bekannt vorausgesetzt wird, gefunden werden können.

Es ist bereits §. I. angemerkt worden, dass sich die Berechnung der Coëfficienten $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ in dem Falle, da das Polynom (2) in den Ausdruck substituirt wird, nicht wesentlich von dem unterscheidet, da man die Entwicklung der Potenz x^n zu suchen hat, und dass nur in den Multiplicatoren $M', M'', M''', \ldots$ dieser Unterschied liege. Da nämlich die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ auf die producirenden Reihen, welche bei diesen Entwicklungen in Betracht kommen, durchaus keinen Einfluss haben; so bleiben sie in beiden Fällen die nämlichen, es mag sich um die Entwicklung des Ausdruckes (1) oder nur der Potenz handeln. Nur die im vorigen Paragraphe mit $\triangle$, M', M'', M''', ... bezeichneten Grössen erleiden eine entsprechende Aenderung, indem man den Formeln (11) und (12) gemäss hat, wenn $f(x)$ den ersten Theil der Gleichung (1) bezeichnet:

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \triangle = f'(A_0);$$

$$(5) \quad M' = \frac{1}{1.2} f''(A_0); \; M'' = \frac{1}{1.2.3} f'''(A_0); \; M''' = \frac{1}{1.2.3.4} f^{IV}(A_0); \text{ etc.}; \; M^{(n-1)} = 1$$

welche an die Stelle der Formeln (9) und (6) zu treten haben, sobald es sich um die Entwicklung von $f(x)$ handelt. Hieraus ist es klar, dass auch die Bestimmungsweise der Werthe der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung des zweiten, dritten, vierten, ... Grades nicht wesentlich von dem Verfahren verschieden sein werde, dessen wir uns bei der Auflösung der reinen Potenzgleichungen, d. i. bei der Ausziehung der Wurzeln des zweiten, dritten, vierten, ... Grades aus Polynomen und aus dekadischen Zahlen bedient, und §. II. bereits zur Darstellung gebracht haben. Zur Erreichung unsers Zweckes bedarf es also nur einer blossen Vertauschung des assignirten Divisors und der Multiplicatoren gegen die aus den Formeln (4), (5) hervorgehenden Zahlen.

Wir wollen nun diese allgemeinen Vorschriften auf die besondern Fälle anwenden, da $n = 2$ und $n = 3$ gesetzt wird, und die Rechnungsmechanismen zur Darstellung bringen, durch welche die Wurzeln von Gleichungen des zweiten und dritten Grades gefunden werden können.

A) Rechnungsmechanismus zur Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.

Für $n = 2$ reducirt sich die Gleichung (1) auf die Gleichung

$$x^2 + a_1 x = a_2.$$

Daraus findet man, wegen $f(x) = x^2 + a_1 x$; $f'(x) = 2x + a_1$; $f''(x) = 2$, und wenn bekannt ist, dass A_0 die untere Grenze der positiven Wurzel dieser Gleichung ist,

$$\triangle = f'(A_0) = 2A_0 + a_1 \; ; \; M' = \frac{1}{2} . f''(A_0) = 1.$$

I. Beispiel. Die Gleichung $x^2 - 20x = -71$ hat eine reelle Wurzel, welche zwischen 15 und 16 liegt. Da hier $a_1 = -20$; $a_2 = -71$; $A_0 = 15$; so hat man

$$\triangle = 30 - 20 = 10 \; ; \; M' = 1.$$

Da hier der assignirte Divisor 10 ist, so kömmt das Schema der Rechnung zur Bestimmung der auf 15 folgenden Ziffern der Wurzel dieser Gleichung auf folgende Weise zu stehen:

$$f(15) = \begin{array}{r} -71 \\ -75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 10\,\dfrac{3851648\ldots}{3851648\ldots} \\ 30 & \end{array}$$

	100		120		140
I. Corr. .	9 = 3.3	III. Corr.	94 = 3.5 + 8.8 + 5.3	V. Corr.	77
	91		26		63
	80		10		40
	110		160		230
II. Corr. . .	48 = 3.8 + 8.3	IV. Corr.	86 = 3.1 + 8.5 + 5.8 + 1.3	VI. Corr.	130
	62		74		100
	50		60		80
	12		14		20
					u. s. f.

Die gesuchte Wurzel ist also 15,3851648...

Wollte man diese Wurzel auf eine grössere Anzahl von Decimalstellen haben, so wäre es vortheilhafter, den assignirten Divisor, wie §. II. A, zu ändern, oder gleich anfänglich $A_0 = 15{,}3$ zur unteren Grenze der Wurzel zu wählen. Alsdann wäre $\triangle = 10{,}6$; $f(15{,}3) = -71{,}91$; und die Rechnung käme folgendermassen zu stehen:

$$\begin{array}{r} -71 \\ -71{,}91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 910 & 106\,\dfrac{851648071345040\ldots}{851648071345040\ldots} \\ 848 & \end{array}$$

	620		630		340		260
I.	64	IV.	106	VIII.	176	XII.	194
	556		524		164		660
	530		424		106	XIII.	214
	260		1000		580		446
II.	80	V.	125	IX.	198		424
	180		875		382		220
	106		848		318	XIV.	162
	740		270		640		580
III.	41	VI.	180	X.	136		u. s. f.
	699		900		504		
	636	VII.	124		424		
	63		776		800		
			742	XI.	244		
			34		556		
					530		
					26		

Hiernach ist $x = 15{,}3851648071345040\ldots$

II. Man habe die Gleichung $x^2+5x=4$, welche eine zwischen 0 und 1 liegende Wurzel hat. Da hier $f(x)=x^2+5x$; $f'(x)=2x+5$; $A_0=0$; $\triangle=f'(0)=5$; so kömmt die Rechnung auf folgende Weise zu stehen:

4		
0		
40	$5\frac{7}{7}$	
35		
50		
49		
10	$64\frac{01562118}{01562118}$	
100		120
64		37
360		83
320		64
400		190
1		64
399		126
384		64
150		620
10		58
140		562
128		512
12		500 u. s. f.

Hiernach ist $x=0{,}701562118\ldots$

B) Rechnungsmechanismus zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

Für $n=3$ reducirt sich die Gl. (1) auf die Gleichung

$$x^3+a_1x^2+a_2x=a_3$$

Wenn A_0 die untere Grenze der einen reellen Wurzel dieser Gleichung ist; so hat man

$$\triangle=3A_0^2+2a_1A_0+a_2;\quad M=3A_0+a_1;\quad M'=1;$$

I. Beispiel. Man sucht die Wurzel der Gleichung

$$x^3-x^2-406x=800,$$

welche zwischen 21 und 22 liegt. Man setze $A_0=21$; alsdann ist

$$f(x)=x^3-x^2-406x;\qquad f(21)=294;$$
$$f'(x)=2x^2-3x-406;\qquad f'(21)=\triangle=875;$$
$$\tfrac{1}{2}f''(x)=3x-2;\qquad \tfrac{1}{2}f''(21)=M=1;$$
$$\tfrac{1}{6}f'''(x)=1;$$

Das Schema der Rechnung zur Bestimmung der auf 21 folgenden Ziffern der Wurzel dieser Gleichung käme nun folgendermassen zu stehen:

800
294
5060 | 875
4375
6850
I. 1550
5300
4375
9250
II. 3250
6000
5250
7500
III. 5420
2080
875
12050
IV. 4970
7080
6125
9550
V. 7822
1728
875
853

5	5	6	1	7	1	1	2	Multipl.
5	5	6	1	7	1	1	2	. . .
25	50	85	70	116	92	105	. .	. . . (62
0	3	0	9	3	2	6	. .	. . .
0	15	15	63	63	100	70	. .	. . . (10

8530
VI. 6704
1826
875
9510
VII. 7210
2300
1750
5500
u. s. f.

25
50
300
85
085
70
920
116
316
92
252
105
625 u. s. f.

Hiernach ist die gesuchte Wurzel $x = 21{,}55617112\ldots$

II. Beispiel. Es sei $x^3 - 200\,x = 5000$ die gegebene Gleichung, deren eine reelle Wurzel zwischen 20 und 21 liegt.

Da hier $f\;(x) = \;x^3 - 200\,x$; $A_0 = 20$; $f(20) = 4000$;

$f'\;(x) = \;x^2 - 200$; $\Delta\; = 1000$

$\frac{1}{2}f''\;(x) = 3x$; $M' = 60$

$\frac{1}{6}f'''\;(x) = 1$ $M'' = 1$

so kömmt das Schema der Rechnung zur Bestimmung der auf 20 folgenden Ziffern der Wurzel auf folgende Art zu stehen:

9	4	5	5	1	4	8	1	5	4	2	3	2	. .	Mult.
9	4	5	5	1	4	8	1	5	4	2	3	2		
81	72	106	130	83	130	211	132	219	210	160	226	..		(60
0	8	9	3	9	9	8	2	6	6	1	8	..		
0	72	113	103	178	185	209	243	248	246	269	309	..		(10

5000
4000
10000 | 1000
9000
10000
I. 4860
5140
4000
11400
II. 5040
6360
5000
13600
III. 7490
6110
5000
11100
IV. 8830
2270
1000
12700
V. 6760
5940
4000
19400
VI. 9650
9750
8000
17500
VII. 14750
2750
1000
17500
VIII. 10350
7150
5000
21500
IX. 15620
5880
4000
18800
X. 15060
3740
2000
1740

17400
XI. 12290
5110
3000
21100
16650
4450
2000
2450
u. s. f.

81
72
882
106
926
130
390
83
983
130
960
211
811
132
242
219
639
210
600
160
160
226
826
u. s. f.

Hiernach ist $x = 20{,}9455148154232\ldots$

III. Beispiel. Die Gleichung $x^3 + 3x^2 - 47x = 674$ hat eine reelle Wurzel, welche zwischen den Grenzen 9 und 10 liegt. Um die übrigen Ziffern dieser Wurzel zu finden, nehme man $A_0 = 9$; alsdann findet man $\Delta = 250$; $M' = 30$; $M'' = 1$.

Das Schema der Rechnung wird dann sein:

674		
549	4727574077116..	Mult.
1250 | 250		
1000	4727574077116..	(30
2500		
I. 480	022349956654...	(10

2020	10700
1750	IX. 7740
2700	2960
II. 1760	1750
940	12100
500	X. 10780
4400	1320
III. 2170	250
2230	10700
1750	XI. 9300
4800	1400
IV. 2820	250
1980	11500
1250	XII. 8780
7300	2720
V. 4810	1500
2490	12200
1750	u. s. f.
7400	
VI. 5560	
1840	
1000	
8400	
VII. 7490	
910	
0	
9100	
VIII. 6280	
2820	
1750	
1070	

Hiernach ist die gesuchte Wurzel $x = 9{,}472757407716\ldots$

§. V.

Darstellung des Systems der Formeln zur Berechnung der Wurzeln der höheren Gleichungen.

Wenn die Gleichung

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} x = a_n,$$

in welcher

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_n = Z_0 + Z_1 z + Z_2 z^2 + Z_3 z^3 + \ldots.$$

angenommen wird, eine einzige positive Wurzel zwischen den Grenzen $a \,..\, b$ liegen hat, welche bereits so nahe an einander liegen, dass die erste Ziffer, oder die zwei bis drei ersten Ziffern, womit die dekadische Zahl a geschrieben wird, dem wahren Werthe der Wurzel angehören; und wenn man die untere Grenze a für den ersten Theil A_0 der Wurzel ansieht, alsdann kann man den Werth dieser Wurzel unter der Form

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots.$$

darstellen, worin die Coëfficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ im Allgemeinen einziffrige Zahlen sind. Im vorigen Paragraphe ist gezeigt worden, wie man mittelst eines geregelten Verfahrens nach und nach zur Kenntniss dieser Ziffern gelangen könne, welche in der Formel (3) durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$ vorgestellt sind. Der hierzu angegebene Rechnungsmechanismus setzt aber voraus, dass auch die gegebenen Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$ bereits die Form dekadischer Zahlen haben, eine Voraussetzung, durch welche der Anwendbarkeit unserer Methode in sofern Schranken gesetzt werden könnten, als in dem Falle, da die in Rede stehenden Coëfficienten beliebige gebrochene Zahlen sind, entweder durch Reduction der vorgelegten Gleichung mit gebrochenen Coëfficienten auf eine andere, worin die sämmtlichen Coëfficienten ganze Zahlen sind, oder durch vorgängige Verwandlung der gebrochenen Coëfficienten in Decimalzahlen, die Rechnungen weitläufig und beschwerlich werden. In diesem Falle kann man es vorziehen, die Rechnung zur Bestimmung der Zahlen $A_0, A_2, A_3, \ldots$ unmittelbar mittelst derjenigen Formeln zu führen, welche auf den §. IV. angegebenen Rechnungsmechanismus eben geleitet haben. Wir wollen daher die besondern Fälle, da $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ ist, nochmals in Betrachtung ziehen, und für dieselben die Systeme von Formeln anzeigen, welche zur Bestimmung der einzelnen Ziffern $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zur Anwendung zu kommen haben. Jedes solche System zerfällt in zwei Abtheilungen. Die Formeln der ersten Abtheilung bleiben für die Berechnung der Wurzeln der Gleichungen bei jedem Grade dieselben. Die der zweiten Abtheilung sind diejenigen, welche zur Berechnung der Correctionen anzuwenden kommen, und welche sich von Grad zu Grad ändern. Wenn also

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots\ldots a_{n-1} x;$$

und A_0 der schon bekannte Theil der Wurzel der Gleichung (1) ist, so hat man in Gemässheit der allgemeinen Formeln §. V. (4), (5):

$$(5) \quad \ldots \quad f(A_0) = A_0^n + a_1 A_0^{n-1} + a_2 A_0^{n-2} + a_3 A_0^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1} A_0;$$

$$(6) \quad . \quad \triangle = nA_0^{n-1} + (n-1) a_1 A_0^{n-1} + (n-2) a_2 A_0^{n-2} + (n-3) a_3 A_0^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-1};$$

$$(7) \quad \begin{cases} M' = \binom{n}{2} A_0^{n-2} + \binom{n-1}{2} a_1 A_0^{n-3} + \binom{n-2}{2} a_2 A_0^{n-4} + \binom{n-3}{2} a_3 A_0^{n-5} + \ldots + a_{n-2}; \\ M'' = \binom{n}{3} A_0^{n-3} + \binom{n-1}{3} a_1 A_0^{n-4} + \binom{n-2}{3} a_2 A_0^{n-5} + \binom{n-3}{3} a_3 A_0^{n-6} + \ldots + a_{n-3}; \\ M''' = \binom{n}{4} A_0^{n-4} + \binom{n-1}{4} a_1 A_0^{n-5} + \binom{n-2}{4} a_2 A_0^{n-6} + \binom{n-3}{4} a_3 A_0^{n-7} + \ldots + a_{n-4}; \\ \qquad \text{u. s. f.} \\ M^{(n-1)} = 1. \end{cases}$$

I. Formeln zur Berechnung der Ziffern $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$

$R_1 = Z_0 - f(A_0)$	$R_2 = \mathfrak{D}_1 - A_1 . \triangle$	$R_3 = \mathfrak{D}_2 - A_2 . \triangle$	u. s. f.
$S_1 = 10 R_1 + Z_1$	$S_2 = 10 R_2 + Z_2$	$S_3 = 10 R_3 + Z_3$	
$\mathfrak{D}_1 = S_1$	$\mathfrak{D}_2 = S_2 - K_1$	$\mathfrak{D}_3 = S_3 - K_2$	
$A_1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{D}_1 : \triangle)$	$A_2 = \mathfrak{S}(\mathfrak{D}_2 : \triangle)$	$A_3 = \mathfrak{S}(\mathfrak{D}_3 : \triangle)$	

In den letzten Formeln, aus denen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gefunden werden, bedeutet der Buchstabe $\mathfrak{S}$ vor den Quotienten $(\mathfrak{D}_1 : \triangle)$; $(\mathfrak{D}_2 : \triangle)$; $(\mathfrak{D}_3 : \triangle)$; $\ldots$, dass man aus denselben bloss den ganzzahligen Theil auszusondern und für den Werth von $A_1, A_2, A_3, \ldots$ anzunehmen habe.

II. Formeln zur Berechnung der Correctionen.

$$K_1' = \binom{A_1}{A_1};$$

I. . $K_1 = M' . K_1'$;

$$K_2' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad K_2'' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix};$$

II. . $K_2 = M' . K_2' + M'' . K_2''$;

$$K_3' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}; \quad K_2'' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix}; \quad K_3''' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix};$$

III. . $K_3 = M' . K_3' + M'' . K_3'' + M''' . K_3'''$;

$$K_4' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix}; \quad K_4'' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix}; \quad K_4''' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 \end{pmatrix}; \quad K_4^{IV} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 \end{pmatrix};$$

IV. . $K_4 = M' . K_4' + M'' . K_4'' + M''' . K_4''' + M^{IV} . K_4^{IV}$;

u. s. f.

Formeln zur Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades.

Die gegebene Gleichung habe die Form $x^2 + a_1 x = a_2$.

Hier ist $f(A_0) = A_0^2 + a_1 A_0$; $\triangle = 2 A_0 + a_1$; $M' = 1$.

folglich $K_1 = K_1'$; $K_2 = K_2'$: $K_3 = K_3'$: $K_4 = K_4'$: u. s. f.

Beispiel. Die gegebene Gleichung sei $x^2 + \frac{1}{3} x = 1848$: also $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = 1848 = Z_0$. Eine Wurzel dieser Gleichung liegt zwischen 42 und 43. Es sei daher $A_0 = 42$; so ist $f(A_0) = 1778$: $\triangle = \frac{253}{3}$. Mithin

$R_1 = 70$	$R_2 = \frac{76}{3}$	$R_3 = \frac{62}{3}$	$R_4 = 6$
$S_1 = 700$	$S_2 = \frac{760}{3}$	$S_3 = \frac{620}{3}$	$S_4 = 60$
$\mathfrak{D}_1 = 700$	$\mathfrak{D}_2 = \frac{568}{3}$	$\mathfrak{D}_3 = \frac{524}{3}$	$\mathfrak{D}_3 = 24$
$A_1 = \mathfrak{S}\left(\frac{2100}{253}\right) = 8$	$A_2 = \mathfrak{S}\left(\frac{568}{253}\right) = 2$	$A_3 = \mathfrak{S}\left(\frac{524}{253}\right) = 2$	$A_3 = \mathfrak{S}\left(\frac{72}{253}\right) = 0$
$K_1 = 64$	$K_2 = 32$	$K_3 = 36$	$K_4 = 8$

$R_5 = \frac{72}{3}$	$R_6 = \frac{166}{3}$	$R_7 =$ u. s. f.
$S_5 = \frac{720}{3}$	$S_6 = \frac{1660}{3}$	
$\mathfrak{D}_5 = \frac{672}{3}$	$\mathfrak{D}_6 = \frac{1552}{3}$	
$A_5 = \mathfrak{G}\left(\frac{672}{253}\right) = 2$	$A_6 = \mathfrak{G}\left(\frac{1552}{253}\right) = 6$	
$K_5 = 36$	$K_6 = 104$	

Hiernach ist $x = 42{,}822026 \ldots$

Formeln zur Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

Die gegebene Gleichung habe die Form $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x = a_n$.

Hier ist $f(A_0) = A_0^3 + a_1 A_0^2 + a_2 A_0$;

$\triangle = 3A_0^2 + 2a_1 A_0 + a_2$;

$M' = 3A_0 = a_1$; $M'' = 1$;

$K_1 = M' . K_1'$;

$K_2 = M' . K_2' + K_2''$; $K_3 = M' . K_3' + K_3''$; $K_4 = M' . K_4' = K_4''$; u. s. f.

Formeln zur Auflösung der Gleichungen des vierten Grades.

Die gegebene Gleichung habe die Form $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x = a_n$.

Hier ist $f(A_0) = A_0^4 + a_1 A_0^3 + a_2 A_0^2 + a_3 A_0$;

$\triangle = 4A_0^3 + 3a_1 A_0^2 + 2a_2 A_0 + a_3$;

$M' = 6A_0^2 + 3a_1 A_0 + a_2$; $M'' = 4A_0 + a_1$; $M''' = 1$;

$K_1 = M' . K_1'$; $K_2 = M' . K_2' + M'' K_2''$; $K_3 = M' . K_3' + M'' . K_2'' + K_3'''$;

$K_4 = M' . K_4' + M'' . K_4'' + K_4'''$;

u. s. f.